INSTITUT
DE LA STATISTIQUE
DU QUÉBEC

www.stat.gouv.qc.ca

ÉCONOMIE

Revue des méthodes de mesure de la productivité multifactorielle

Cahier technique et méthodologique

André Lemelin
Professeur-chercheur, INRS-UCS

Québec

REVUE DES MÉTHODES DE MESURE DE LA PRODUCTIVITÉ MULTIFACTORIELLE

par

André Lemelin[1]

INRS-UCS

Juillet 2010

Étude réalisée pour

l'Institut de la statistique du Québec[2]

1. Professeur-chercheur, INRS-UCS, Université du Québec.

2 Les opinions exprimées dans ce document sont la seule responsabilité de l'auteur et n'engagent en rien l'Institut de la statistique du Québec.

Pour tout renseignement concernant l'ISQ
et les données statistiques dont il dispose,
s'adresser à :

Institut de la statistique du Québec
200, chemin Sainte-Foy
Québec (Québec) G1R 5T4
Téléphone : 418 691-2401

ou

Téléphone : 1 800 463-4090
(sans frais d'appel au Canada et aux États-Unis)

Site Web : www.stat.gouv.qc.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives Canada
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
3e trimestre 2010
ISBN : 978-2-550-59724-7 (PDF)

Juillet 2010

AVANT-PROPOS

Ce rapport est le premier volet d'une étude de faisabilité en vue d'estimer, sur une base annuelle, la productivité multifactorielle (PMF) selon la valeur ajoutée de l'économie québécoise et de ses secteurs d'activité ou de ses industries. La mise sur pied de cette étude est le fruit d'une collaboration entre l'Institut de la statistique du Québec (ISQ) et l'Institut national de la recherche scientifique (INRS), particulièrement du chercheur André Lemelin.

La productivité mesure l'efficacité avec laquelle les ressources (les intrants) sont utilisées au cours de l'activité économique. La PMF vise à prendre en considération le rôle que joue la croissance du travail, du capital et des intrants intermédiaires dans la croissance de la production, ce qui constitue un élargissement par rapport à la notion de productivité du travail, qui ne tient compte que de l'effet de l'intrant travail.

Ce rapport fait une revue des méthodes utilisées pour mesurer la productivité multifactorielle, soit selon la valeur ajoutée ou encore la production brute, en regard des intrants pris en considération (travail et capital, avec ou sans les intrants intermédiaires – énergie, matériaux et services). Les fondements théoriques de la PMF y sont d'abord établis, ce qui sert de toile de fond aux exposés méthodologiques qui suivent et permet d'évaluer la validité des méthodes étudiées. Celles-ci proviennent en grande partie de Statistique Canada, mais aussi d'autres organisations telles que le Bureau of Labor Statistics des État-Unis (BLS), l'OCDE et le Groningen Growth & Development Centre (GGDC) de l'Université de Groningen, notamment.

La mesure de la productivité est d'un grand intérêt pour les analystes, les responsables de l'élaboration de politiques et les chercheurs pour quantifier la contribution de la productivité à la croissance économique et au niveau de vie à long terme.

Le directeur général,

Stéphane Mercier

*Produire une information statistique pertinente, fiable et objective, comparable, actuelle, intelligible et accessible, c'est là l'engagement « **qualité** » de l'Institut de la statistique du Québec.*

Cette publication a été réalisée par :	André Lemelin, professeur-chercheur INRS-UCS, Université du Québec
Direction des statistiques économiques et du développement durable :	Pierre Cauchon, directeur
Ont collaboré à cette publication :	Réjean Aubé, coordonnateur des mesures de production et commerce extérieur Danielle Bilodeau, économiste Direction des statistiques économiques et du développement durable Institut de la statistique du Québec
Ont apporté leur précieuse collaboration :	Esther Frève, pour la révision linguistique Marie-Ève Cantin, pour la mise en page Danielle Laplante, pour la coordination de l'édition Direction des communications Institut de la statistique du Québec
Pour tout renseignement concernant le contenu de cette publication :	Danielle Bilodeau Direction des statistiques économiques et du développement durable Institut de la statistique du Québec 200, chemin Sainte-Foy, 3e étage Québec (Québec) G1R 5T4 Téléphone : 418 691-2411 Télécopieur : 418 643-4129 Site Web : www.stat.gouv.qc.ca Courrier électronique : economie@stat.gouv.qc.ca

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce rapport est le premier volet d'une étude de faisabilité en vue d'estimer, sur une base annuelle, la productivité multifactorielle (PMF) selon la valeur ajoutée de l'économie québécoise et de ses secteurs d'activité ou de ses industries. L'étude de faisabilité fait suite aux estimations expérimentales présentées par Danielle Bilodeau en mai 2008.

Ce rapport fait une revue de la littérature sur les méthodes utilisées pour mesurer la productivité multifactorielle selon la valeur ajoutée et selon la production brute. L'accent y est mis sur la méthode de Statistique Canada, dont la foisonnante documentation pose un défi considérable de synthèse. Mais d'autres organisations mènent des travaux d'estimation de la PMF : le Bureau of Labor Statistics des États-Unis (BLS), l'OCDE et le Groningen Growth & Development Centre (GGDC) de l'Université de Groningen, notamment.

Il n'eût guère été possible de se retrouver dans le dédale des exposés méthodologiques sans avoir au préalable établi les fondements théoriques qui en éclairent le sens et permettent d'en évaluer la validité. C'est pourquoi le premier chapitre est dédié à une présentation du cadre théorique. Il se divise en deux parties. La première expose brièvement la théorie économique de la mesure de l'évolution de la productivité au moyen d'une décomposition de la croissance, dont Solow (1957) a posé les bases et qui s'est enrichie des contributions de Domar (1961), Jorgenson et Griliches (1969) et Hulten (1978), entre autres. L'exercice de décomposition de la croissance (désigné en anglais par l'expression « growth accounting ») consiste d'abord à mesurer la croissance de la production, puis à mettre celle-ci en relation avec la croissance des intrants, pour attribuer à chacun des intrants pris en compte une fraction de la croissance de la production; le résidu (la fraction de la croissance qui n'est attribuée à aucun intrant) est ensuite interprété comme un effet de la croissance de la « productivité multifactorielle ». Mais dès lors qu'il y a plus d'un produit ou plus d'un intrant, il devient nécessaire, pour établir ce rapport, de résumer en un indicateur unique les quantités des produits, d'une part, et les quantités d'intrants, d'autre part. L'analyse de la productivité est donc intrinsèquement liée au problème des nombres-indices, qui fait l'objet de la deuxième partie du premier chapitre. Cette deuxième partie est dominée par la monumentale figure d'Irwin Diewert, dont les contributions originales et les synthèses encyclopédiques constituent l'armature de la théorie des nombres-indices.

Le deuxième chapitre du rapport est un exposé de la méthodologie de Statistique Canada. Après une brève présentation des programmes de productivité multifactorielle de Statistique Canada et un survol de sa procédure de décomposition de la croissance, on aborde tout à tour la mesure de la production et des intrants intermédiaires, celle du capital et, enfin, celle du travail. Le troisième chapitre élargit l'horizon aux trois organisations mentionnées précédemment. Un résumé-conclusion clôt le rapport.

1. CADRE THÉORIQUE

1.1 Théorie économique de la décomposition de la croissance

C'est Solow (1957) qui a posé les bases de la mesure de l'évolution de la productivité au moyen d'une décomposition de la croissance. Dans le foisonnement des écrits qui s'en sont suivis, nous retenons en particulier Domar (1961), Jorgenson et Griliches (1969) et Hulten (1978). Selon cette approche, la mesure de la productivité multifactorielle (PMF) est essentiellement un exercice de décomposition de la croissance (désigné en anglais par l'expression « growth accounting »). L'exercice consiste d'abord à mesurer la croissance de la production, puis à mettre celle-ci en relation avec la croissance des intrants, pour attribuer à chacun des intrants pris en compte une fraction de la croissance de la production; le résidu (la fraction de la croissance qui n'est attribuée à aucun intrant) est ensuite interprété comme un effet de la croissance de la « productivité multifactorielle ».

Selon la définition de la production (production brute ou valeur ajoutée) et la liste des intrants pris en compte (travail et capital, avec ou sans les intrants intermédiaires – énergie, matériaux et services) et selon la façon de mesurer ceux-ci, on obtient des mesures de la croissance de la PMF qui correspondent à différents concepts de la PMF. La réflexion théorique a porté notamment sur les relations entre les divers concepts de productivité multifactorielle.

Cette section présente un compte rendu synthétique de la théorie, en s'appuyant principalement sur Hulten (1978).

1.1.1 TAUX DE VARIATION DE LA PRODUCTIVITÉ AGRÉGÉE DE L'ENSEMBLE DE L'ÉCONOMIE

Au niveau agrégé, on peut examiner le changement de la productivité au moyen d'une frontière des possibilités de production (FPP), que l'on suppose continûment différentiable et homogène de degré zéro :

$$F(Y, J) = 0 \qquad [001]$$

où Y est le vecteur des demandes finales et J, le vecteur (exogène) de l'offre de facteurs primaires.

En vertu de l'identité d'Euler, l'homogénéité implique

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i = -\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} J_k \qquad [002]$$

La différentielle de [001] est donnée par

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} dY_i + \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} dJ_k = dF \qquad [003]$$

où $dF = 0$, sauf si la FPP se déplace. On suppose que $\frac{\partial F}{\partial Y_i} > 0$ et $\frac{\partial F}{\partial J_k} < 0$: il s'ensuit que, en l'absence de déplacement de la FPP, si on veut accroître la production d'un Y_i, il faut, soit réduire celle d'un ou de plusieurs autres Y_j, soit augmenter la disponibilité d'un ou de plusieurs facteurs J_k. En temps continu, un accroissement de la productivité multifactorielle (PMF) prend la forme d'un déplacement de la FPP et se traduit algébriquement par $dF > 0$. Étant donné $\frac{\partial F}{\partial Y_i} > 0$ et $\frac{\partial F}{\partial J_k} < 0$, un accroissement de la PMF permet d'augmenter la production d'un ou de plusieurs Y_i ou de réduire l'utilisation d'un ou de plusieurs J_k ou les deux.

Soit la notation

$$\frac{dZ}{dt} = \dot{Z}$$

À partir de la différentielle [003], on construit la dérivée totale de [001] par rapport au temps, que l'on peut écrire comme :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} J_k \frac{\dot{J}_k}{J_k} = \dot{F} \qquad [004]$$

où $\dot{F}$ est le taux de variation de la productivité multifactorielle agrégée, c'est-à-dire le taux de déplacement de la FPP.

En divisant chaque terme de [004] par l'un des deux membres de [002], on trouve

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \right) \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial J_k} J_k}{\sum_{j=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_j} J_j} \right) \frac{\dot{J}_k}{J_k} = \left(\frac{\dot{F}}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \right) \qquad [005]$$

et on définit

$$T = \frac{\dot{F}}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \qquad [006]$$

Pour un vecteur $\bar{J}$ d'offre de facteurs primaires fixe, l'équation de la tangente à la FPP [001] au point Y_h dans l'espace des produits est donnée par

$$\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h = \text{constante} \tag{007}$$

Le dénominateur du membre de droite de [006] est donc cette constante et T peut s'interpréter comme le taux de déplacement de la FPP par rapport à la position de sa tangente au point Y (Hulten, 1978, p. 513, écrit : « the rate of change of [the social production possibility frontier] with respect to the tangent at Y. »).

En équilibre concurrentiel, les facteurs sont rémunérés à la valeur de leur productivité marginale et les prix relatifs des produits sont égaux à moins [la valeur algébrique de] leur taux marginal de transformation. Ces conditions d'équilibre impliquent :

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i Y_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \right) \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k J_k}{\sum_{j=1}^{K} w_j J_j} \right) \frac{\dot{J}_k}{J_k} \tag{008}$$

Le taux de variation T est donc égal à la différence entre le taux de variation de l'indice de Divisia de la production et celui de l'utilisation des facteurs primaires. Il s'agit donc bien d'une décomposition du taux de croissance agrégé de la production (premier terme du membre de droite), qui est décomposé en deux parties : le taux de croissance agrégé de l'utilisation de facteurs primaires (deuxième terme du membre de droite) et le résidu T, interprété comme le taux de croissance de la productivité multifactorielle.

1.1.2 TAUX DE VARIATION DE LA PRODUCTIVITÉ MULTIFACTORIELLE D'UNE INDUSTRIE

Soit la fonction de production implicite d'une industrie

$$F^i\left(Q_i, X^i, J^i\right) = Q_i - f^i\left(X^i, J^i\right) = 0\,,\ i = 1, \cdots, N \tag{009}$$

où Q_i est le produit brut de l'industrie (on suppose un seul produit par industrie) et X^i et J^i sont les vecteurs d'intrants intermédiaires et primaires. Cette fonction de production implicite est supposée homogène de degré zéro, ce qui implique que la fonction de production f^i est homogène du premier degré.

La différentielle de [009] est donnée par

$$dF^i = dQ_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f^i}{\partial X_{ji}} dX_{ji} - \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial f^i}{\partial J_{ki}} dJ_{ki} \text{ , } i = 1, \cdots, N \qquad [010]$$

où $dF^i = 0$ si la PMF de l'industrie demeure constante. Un accroissement de la productivité multifactorielle (PMF) prend la forme d'un déplacement de la fonction de production et se traduit algébriquement par $dF^i > 0$. Étant donné $\frac{\partial f^i}{\partial X_{ji}} > 0$ et $\frac{\partial f^i}{\partial J_{ki}} > 0$, un accroissement de la PMF permet d'augmenter la production ou de réduire l'utilisation d'un ou de plusieurs intrants intermédiaires ou primaires ou les deux.

Sous l'hypothèse de l'équilibre concurrentiel, la dérivée du logarithme de [010] par rapport au temps est :

$$\frac{\dot{F}^i}{Q_i} = \frac{\dot{Q}_i}{Q_i} - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j}{p_i} \frac{X_{ji}}{Q_i} \frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}} \right) - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k}{p_i} \frac{J_{ki}}{Q_i} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) \qquad [011]$$

Puisque, en vertu de l'identité d'Euler, l'homogénéité de la fonction de production f^i implique

$$p_i Q_i = \sum_{j=1}^{N} \left(p_j X_{ji} \right) + \sum_{k=1}^{K} \left(w_k J_{ki} \right) \qquad [012]$$

il s'ensuit que les deux derniers termes du membre de droite de [011] sont le taux de variation d'un indice de Divisia des quantités d'intrants intermédiaires et primaires respectivement. L'équation [011] définit le taux de variation de la PMF par rapport au volume de production brute comme la différence entre le taux de variation du volume de production et celui d'un indice de Divisia des quantités d'intrants. Autrement dit, le taux de croissance de la production $\dot{Q}/Q$ est décomposé en trois parties : le taux de croissance de l'utilisation d'intrants intermédiaires (avant-dernier terme du membre de droite de [011]), le taux de croissance de l'utilisation de facteurs primaires (dernier terme du membre de droite), et le résidu, interprété comme le taux de croissance de la PMF.

1.1.3 Agrégation à la Domar (1961)

Quelle est la formule appropriée pour calculer le taux de variation T de la productivité agrégée à partir des taux de variation de la productivité des industries individuelles? Sachant que l'économie doit respecter les identités d'équilibre comptable en volume

$$Q_i = Y_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \text{ , } i = 1, \cdots, N \qquad [013]$$

$$J_k = \sum_{i=1}^{N} J_{ki} \text{ , } k = 1, \cdots, K \qquad [014]$$

Hulten (1978) montre que

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \frac{\dot{F}^i}{Q_i} \qquad [015]$$

Le taux de variation de la PMF agrégée est une somme pondérée des taux de variation de la PMF des industries par rapport à leur produit brut. On note dans l'équation [015] que la somme des poids est généralement supérieure à 1, puisque, étant donné la consommation intermédiaire, le produit brut d'une industrie est généralement supérieur à la consommation finale de son produit. Ce résultat correspond précisément à la règle d'agrégation de Domar (1961), avec une somme des poids supérieure à 1.

Ajoutons que cette règle d'agrégation s'applique aussi bien à un groupe d'industries qu'à l'ensemble de l'économie. Car si on a considéré jusqu'à maintenant la FPP comme une représentation de l'ensemble de l'économie, on peut tout aussi bien la considérer comme une représentation d'un « secteur » (c'est le terme employé par Domar, 1961), c'est-à-dire d'un groupe d'industries. Dans ce cas, J est le vecteur des facteurs primaires et des intrants intermédiaires provenant de l'extérieur du secteur. Le vecteur Y représente la production *nette* vendue à l'extérieur du groupe d'industries. Le taux de variations de la PMF du secteur peut se calculer à partir des taux de variation de la PMF des industries qui le composent au moyen de la formule [015].

1.1.4 INTÉGRATION VERTICALE

L'identité comptable [013] peut se récrire sous la forme

$$Q_i = Y_i + X_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_{ij} \text{ , } i = 1, \cdots, N \qquad [016]$$

où l'on distingue :

- la production brute de l'industrie Q_i;
- la production nette de l'industrie $Q_i - X_{ii} = Y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_{ij}$;
- la production finale du point de vue de l'ensemble de l'économie Y_i.

Si une industrie est intégrée verticalement, le volume observé de sa production est $Q_i - X_{ii}$. On se trouve dans la même situation lorsqu'on procède à l'intégration par manipulation des données, en soustrayant du produit brut de l'industrie sa consommation intermédiaire de son propre produit. Le taux de variation de la PMF que l'on obtient est alors

$$\frac{\dot{F}^i}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} = \frac{\dot{Q}_i - \dot{X}_{ii}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j}{p_i}\frac{X_{ji}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)}\frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}}\right) - \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{w_k}{p_i}\frac{J_{ki}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)}\frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}}\right) \qquad [017]$$

Il y a clairement une différence entre la variation de la PMF par rapport à la production brute [011] et la variation de la PMF par rapport à la production nette. Le taux de variation de la PMF par rapport au volume de production brute est égal au taux de variation de la PMF par rapport au volume de production nette, multiplié par le rapport de la production nette sur la production brute. Cela est conforme au résultat de Domar (1961), le rapport $\frac{Q_i}{Q_i - X_{ii}}$ étant l'équivalent de $\frac{1}{1-\gamma}$ chez Domar.

1.1.5 PMF PAR RAPPORT À LA VALEUR AJOUTÉE

Supposons que la fonction de production dans [009] soit séparable :

$$f^i\left(X^i, J^i\right) = g^i\left(X^i, V_i\right) \qquad [018]$$

$$V_i = h^i\left(J^i\right) \qquad [019]$$

où V_i est un indice de volume de l'agrégat de facteurs primaires[3]. Puisque la fonction de production f^i est homogène du premier degré, h^i doit l'être aussi : car pour que

$$\lambda f^i\left(X^i, J^i\right) = f^i\left(\lambda X^i, \lambda J^i\right) = g^i\left(\lambda X^i, \lambda V_i\right) \qquad [020]$$

il faut que $h^i\left(\lambda J^i\right) = \lambda V_i$

Il est à noter que la valeur de V_i est arbitraire, puisque, pour toute paire de fonctions homogènes du premier degré, g^i et h^i vérifiant [018], on peut définir une autre paire de fonctions g^{*i} et h^{*i} telles que

$V_i' = h^{*i}\left(J^i\right) = \lambda h^i\left(J^i\right) = \lambda V_i$ et

$$g^{*i}\left[X^i, V_i'\right] = g^i\left[X^i, \frac{V_i'}{\lambda}\right] = g^i\left[X^i, \frac{h^{*i}\left(J^i\right)}{\lambda}\right] = g^i\left[X^i, h^i\left(J^i\right)\right] = f^i\left(X^i, J^i\right) \qquad [021]$$

---

3 Ce qui est différent de la valeur ajoutée, comme on le verra plus loin.

Mais les conditions d'équilibre concurrentiel impliquent

$$q_i V_i = \sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki} \qquad [022]$$

L'équation [022] indique que, même si la valeur de l'indice V_i est arbitraire (sous réserve de [018]), le produit $q_i V_i$, est défini par les prix et les quantités des facteurs primaires. Par conséquent, une fois définies les fonctions g^i et h^i vérifiant [018], V_i est déterminée par h^i et par J^i et le prix q_i est déterminé par

$$q_i = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki}}{V_i} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki}}{h^i\left(J^i\right)} \qquad [023]$$

De plus, la dérivée logarithmique par rapport au temps

$$\frac{\dot{V}_i}{V_i} = \frac{1}{V_i}\frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{\lambda V_i}\frac{d\left(\lambda V_i\right)}{dt} \qquad [024]$$

est homogène de degré zéro et indépendante du choix de h^i.

On récrit la fonction de production

$$F^i\left(Q_i, X^i, J^i\right) = Q_i - g^i\left(X^i, V_i\right) = 0 \text{ avec } V_i = h^i\left(J^i\right),\ i = 1, \cdots, N \qquad [025]$$

La différentielle de [025] est donnée par

$$dF^i = dQ_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial g^i}{\partial X_{ji}} dX_{ji} - \frac{\partial g^i}{\partial V_i} dV_i \text{ avec } dV_i = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial h^i}{\partial J_{ki}} dJ_{ki},\ i = 1, \cdots, N \qquad [026]$$

où $dF^i = 0$ si la PMF de l'industrie demeure constante.

La dérivée de [025] par rapport au temps est :

$$\dot{F}^i = \dot{Q}_i - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial g^i}{\partial X_{ji}} \dot{X}_{ji}\right) - \frac{\partial g^i}{\partial V_i}\dot{V}_i \qquad [027]$$

D'où

$$\frac{\dot{Q}_i}{Q_i} = \frac{\dot{F}^i}{Q_i} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j}{p_i}\frac{X_{ji}}{Q_i}\frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}}\right) + \frac{q_i}{p_i}\frac{V_i}{Q_i}\frac{\dot{V}_i}{V_i} \qquad [028]$$

On ***définit*** l'indice de ***volume*** de la valeur ajoutée comme

$$Z_i = \frac{p_i Q_i - \sum_{j=1}^{N} p_j X_{ji}}{q_i} \qquad [029]$$

Répétons-le : l'indice de volume de la valeur ajoutée n'est pas la même chose que l'indice agrégé du volume des facteurs primaires. La différence, on le verra, est que le premier incorpore la PMF. Rappelons aussi que le niveau de l'indice de prix q_i dépend de l'échelle arbitraire de h^i (sous réserve de [018]). Mais comme $\dot{V}_i / V_i$, $\dot{Z}_i / Z_i$ est homogène de degré zéro et indépendant du choix de h^i.

Étant donné l'hypothèse d'homogénéité et les conditions d'équilibre concurrentiel, la dérivée du logarithme de Z_i par rapport au temps est

$$\frac{\dot{Z}_i}{Z_i} = \frac{1}{q_i V_i / p_i Q_i} \frac{\dot{F}^i}{Q_i} + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k}{q_i} \frac{J_{ki}}{V_i} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) \qquad [030]$$

Supposons maintenant que l'on mesure le taux de variation de la PMF par

$$\dot{\Phi}^i = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k J_{ki}}{\sum_{h=1}^{K} w_h J_{hi}} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k J_{ki}}{q_i V_i} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \frac{\dot{V}_i}{V_i} = \frac{1}{q_i V_i / p_i Q_i} \frac{\dot{F}^i}{Q_i} \qquad [031]$$

On obtient une mesure qui est différente de celle qui s'obtient à partir de la production brute. Ceci s'accorde avec l'affirmation du *Manuel* de l'OCDE (2001a, p. 26), qui cite Bruno (1978) : la PMF par rapport à la valeur ajoutée est liée à la PMF par rapport à la production brute par une relation de proportionnalité simple. En effet, $\frac{1}{q_i V_i / p_i Q_i}$ est l'inverse de la part de la valeur ajoutée dans la valeur de la production brute. Il est toutefois important de garder à l'esprit que la part de la valeur ajoutée dans la valeur de la production peut varier dans le temps. Il s'ensuit que, non seulement le niveau de la PMF par rapport à la valeur ajoutée est différent de celui de la PMF par rapport à la production brute, mais leurs taux de croissance peuvent diverger. L'implication pratique de cela est que, lorsqu'on examine la croissance de la PMF en temps discret (ce qui n'est pas le cas ici), il est possible, par exemple, d'observer une accélération de la croissance de la PMF par rapport à la valeur ajoutée, sans pour autant que la croissance de la PMF par rapport à la production brute ait accéléré. En temps discret, pour étudier l'évolution de la PMF par rapport à la production brute au moyen de la PMF par rapport à la valeur ajoutée, il faut tenir compte du changement de la part de la valeur ajoutée dans la valeur de la production (OCDE 2001a, p. 28-31).

On peut donc établir la correspondance suivante

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \frac{\dot{F}^i}{Q_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \frac{q_i V_i}{p_i Q_i} \dot{\Phi}^i = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i V_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \dot{\Phi}^i \qquad [032]$$

Étant donné que les conditions de l'équilibre concurrentiel et l'homogénéité des fonctions de production impliquent

$$\sum_{i=1}^{N} p_i Y_i - \sum_{i=1}^{K} w_k J_k = 0 \qquad [033]$$

et

$$q_i V_i = \sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki} \qquad [022]$$

on a

$$\sum_{i=1}^{N} p_i Y_i = q_i V_i \qquad [034]$$

et l'équation [032] revient à

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i V_i}{\sum_{h=1}^{N} q_h V_h} \dot{\Phi}^i \qquad [035]$$

où la somme des poids est égale à 1.

1.2 Nombres-indices et décomposition de la croissance

Les développements théoriques exposés à la section 1.1 conduisent à différentes décompositions de la croissance. Dans chaque cas, le terme résiduel est interprété comme la variation de la productivité multifactorielle, les autres termes de l'équation ayant été identifiés *a posteriori* comme les taux de croissance d'indices de Divisia du volume de la production et des intrants.

En fait, l'analyse de la productivité est intrinsèquement liée au problème des nombres-indices. En effet, réduite à sa plus simple expression, la productivité est le rapport de la production sur les intrants : dès lors qu'il y a plus d'un produit ou plus d'un intrant, il devient nécessaire, pour établir ce rapport, de résumer en un indicateur unique les quantités des produits, d'une part, et les quantités d'intrants, d'autre part.

De manière plus rigoureuse, Diewert (1987a) définit ainsi le problème des nombres-indices : à partir d'un ensemble de données de prix $p_i(t)$ et de quantités $x_i(t)$, $t = 1,\cdots,T$, trouver deux séries de nombres $P(t)$ et $X(t)$ tels que

$$P(t)X(t) = \sum_i p_i(t)x_i(t)\,,\; t = 1,\cdots,T \qquad [036]$$

$P(t)$ est l'indice de prix pour la période t et $X(t)$ est l'indice de quantité correspondant. En pratique, on utilise plus souvent les rapports de nombres-indices : $P(1)/P(0)$ et $X(1)/X(0)$ sont respectivement les indices de prix et de quantité de la période 1 *par rapport* à la période 0. Dans ce qui suit, sauf indication contraire, l'expression « nombre indice » désigne un tel rapport.

Par ailleurs, l'exercice de décomposition de la croissance exposé en 1.1 est énoncé en temps continu. Or les données économiques ne sont pas collectées en continu. Dans les travaux appliqués, il faut donc reformuler les équations de décomposition en temps discret. Le passage de la théorie aux applications pose donc le problème de l'estimation ou de l'approximation de l'intégrale des taux de variation d'indices de Divisia.

1.2.1 Calcul intégral des indices de Divisia

Les indices de Divisia, que Diewert (1981)[4] attribue conjointement à Divisia (1925) et à Bennett (1920), ont été développés pour distinguer, dans l'évolution du montant d'une dépense, l'effet des variations de quantité et l'effet des variations de prix. Soit $p_i(t)$ et $x_i(t)$, respectivement le prix et la quantité du bien i considérés comme des fonctions continues du temps t. Considérons la dépense $\sum_i p_i(t)x_i(t)$, dont la dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_i p_i(t)x_i(t) = \sum_i p_i(t)\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} + \sum_i x_i(t)\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} \qquad [037]$$

On divise [037] par la dépense totale $\sum_i p_i(t)x_i(t)$ et, avec la notation $\dot{x}_i(t) = \frac{\partial x_i(t)}{\partial t}$ et $\dot{p}_i(t) = \frac{\partial p_i(t)}{\partial t}$, on trouve :

4 Ce qui suit est largement repris de Diewert 1981, p. 215-216.

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\sum_i p_i(t)x_i(t)\right)=\sum_i s_i(t)\frac{\partial \ln x_i(t)}{\partial t}+\sum_i s_i(t)\frac{\partial \ln p_i(t)}{\partial t}\text{, avec } s_j(t)=\frac{p_j(t)x_j(t)}{\sum_i p_i(t)x_i(t)} \qquad [038]$$

où $s_j(t)$ est la part du bien j dans le flux de dépense à l'instant t.

L'intégrale de [038] sur l'intervalle de temps [0,1] est

$$\ln\left(\frac{\sum_i p_i(1)x_i(1)}{\sum_i p_i(0)x_i(0)}\right)=\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}\right]dt+\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)}\right]dt \qquad [039]$$

Dans cette expression,

$$\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}\right]dt$$

est le logarithme du rapport de l'indice de quantité de Divisia au temps 1 sur sa valeur au temps 0;

$$\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)}\right]dt$$

est le logarithme du rapport de l'indice de prix de Divisia au temps 1 sur sa valeur au temps 0.

Cette façon de définir les indices de Divisia est purement mécanique. L'indice de Divisia peut cependant se rattacher à la théorie économique des nombres-indices, comme on le verra plus loin.

1.2.2 Théorie économique des nombres-indices

La théorie économique des nombres-indices s'appuie sur un modèle microéconomique d'agent rationnel (optimisant). Selon cette approche, comme l'explique Diewert (1993, p. 11 et suiv.), les définitions mathématiques des indices sont dérivées de la solution de l'un ou l'autre de deux problèmes d'optimisation; l'un conduit à l'indice de prix de Konüs (1924) et l'autre à l'indice de quantité de Malmquist (1953). La théorie économique des nombres-indices s'applique aussi bien à la consommation ou à la production. Aussi Diewert (1987a) utilise-t-il l'expression « fonction d'agrégation » (« aggregator function ») pour désigner tantôt une fonction d'utilité, tantôt une fonction de production.

1.2.2.1 L'indice de prix de Konüs

Soit donc une fonction d'agrégation[5] $F(\mathbf{x})$, où $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ est le vecteur des consommations de biens ou des quantités d'intrants, selon le contexte. On définit la fonction de coût ou de dépense comme

$$C(u, \mathbf{p}) = \underset{\mathbf{x}}{MIN}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \quad [040]$$

où $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ est le vecteur des prix. On qualifie la fonction d'agrégation de « néoclassique » si elle est continue, positive et homogène du premier degré. Dans ces conditions, la fonction de coût unitaire définie par

$$c(\mathbf{p}) = C(1, \mathbf{p}) \quad [041]$$

vérifie

$$C(u, \mathbf{p}) = uC(1, \mathbf{p}) = uc(\mathbf{p}) = F(\mathbf{x})c(\mathbf{p}) \quad [042]$$

La fonction d'agrégation est dite homothétique s'il existe une transformation monotone croissante et continue g telle que $g[F(\mathbf{x})]$ est néoclassique. Dans ce cas,

$$C(u, \mathbf{p}) = g(u)c(\mathbf{p}) \quad [043]$$

Cela étant posé, un indice de prix « vrai » (« true » en anglais), ou indice du coût de la vie, de Konüs (1924) est défini comme

$$P_K(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}) = \frac{C[F(\mathbf{x}), \mathbf{p}^1]}{C[F(\mathbf{x}), \mathbf{p}^0]} \quad [044]$$

En général, un indice de prix de Konüs dépend, non seulement des prix, mais aussi du panier de biens de référence $\mathbf{x}$[6]. Toutefois, plusieurs auteurs ont montré que l'indice de prix de Konüs est indépendant du panier de référence si, et seulement si, la fonction d'agrégation est homothétique. L'indice est alors égal au rapport des coûts unitaires :

$$P_K(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}) = \frac{c(\mathbf{p}^1)}{c(\mathbf{p}^0)}, \ \forall \mathbf{x} \quad [045]$$

---

5 La notation utilisée dans cette section est celle de l'écriture matricielle standard : les lettres en caractère gras désignent des vecteurs ou des matrices; les matrices et vecteurs transposés sont munis d'un accent (« prime »); les vecteurs sont des vecteurs colonnes, à moins d'être transposés. Le produit intérieur de deux vecteurs $\mathbf{a}' \mathbf{b}$ s'écrit aussi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Les symboles peuvent être affectées d'indices suscrits ou souscrits ou les deux; en pratique, le seul exposant qui figure dans les développements est « –1 ».

6 Il est important de garder à l'esprit que le panier de référence $\mathbf{x}$ n'est pas nécessairement le vecteur solution de [040] : plutôt, comme on peut le voir dans [044], ce panier de référence sert à déterminer le niveau $u = F(\mathbf{x})$ de la fonction d'agrégation qui contraint le problème d'optimisation.

L'indice de prix de Konüs est néanmoins un indice théorique en ce que la définition [044] dépend de la fonction d'agrégation inconnue $F(\mathbf{x})$ et de la fonction de coût qui en découle, dont la forme fonctionnelle n'est pas spécifiée.

Quel indice de quantité correspondrait à un indice de prix de Konüs? À partir de [036], on a

$$\frac{P(1)}{P(0)}\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{\sum_i p_i(1)x_i(1)}{\sum_i p_i(0)x_i(0)}=\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [046]$$

Si

$$\frac{P(1)}{P(0)}=P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right) \qquad [047]$$

alors l'indice de quantité implicite associé à l'indice de prix de Konüs est l'indice de quantité de Konüs-Pollak, défini par

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{1}{P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [048]$$

Sous l'hypothèse d'un comportement optimisant, on a

$$\mathbf{p}^t\cdot\mathbf{x}^t=C\left[F\left(\mathbf{x}^t\right),\mathbf{p}^t\right] \qquad [049]$$

et

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{1}{P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)}\frac{C\left[F\left(\mathbf{x}^1\right),\mathbf{p}^1\right]}{C\left[F\left(\mathbf{x}^0\right),\mathbf{p}^0\right]} \qquad [050]$$

Si $F(\ )$ est homothétique, alors, étant donné [045],

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)}\frac{C\left[F\left(\mathbf{x}^1\right),\mathbf{p}^1\right]}{C\left[F\left(\mathbf{x}^0\right),\mathbf{p}^0\right]}=\frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)}\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)}\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)}=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [051]$$

Si la fonction d'agrégation $F(\ )$ est homothétique, l'indice de quantité de Konüs-Pollak est égal au rapport des valeurs de la fonction d'agrégation.

1.2.2.2 L'indice de quantité de Malmquist

Selon Diewert (1987a), on définit la fonction de distance (ou de déflation) comme :

$$D(u,\mathbf{x})=\underset{k}{MAX}\left\{k>0:F\left(k^{-1}\mathbf{x}\right)\geq u\right\} \qquad [052]$$

Si l'on interprète la fonction d'agrégation comme une fonction de production et le vecteur **x** comme le vecteur des intrants, alors la fonction de distance $D(u,\mathbf{x})$ indique dans quelle proportion le vecteur d'intrants **x** dépasse ce qui est nécessaire pour atteindre le niveau de production fixé u.

L'indice de quantité de Malmquist (1953) est alors défini par :

$$Q_M\left(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}\right)=\frac{D\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{x}^1\right]}{D\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{x}^0\right]} \qquad [053]$$

Ici encore, le panier de référence **x** n'intervient pas directement dans la comparaison entre $\mathbf{x}^1$ et $\mathbf{x}^0$, mais plutôt indirectement, en fixant le niveau $u = F(\mathbf{x})$ de la fonction d'agrégation qui contraint le problème de maximisation [052]. Il faut remarquer en outre que la définition de la fonction de distance ne fait pas appel à l'hypothèse de comportement optimisant, mais uniquement à l'hypothèse plus restreinte d'efficience technique (le fait d'être sur la frontière des possibilités de production, et non en deçà, par opposition à l'efficience économique, qui suppose la minimisation des coûts). Comme l'indice de prix de Konüs, l'indice de quantité de Malmquist est un indice théorique, défini par une fonction d'agrégation dont la forme fonctionnelle n'est pas spécifiée.

Pollak (1971) montre que si la fonction d'agrégation est néoclassique, alors

$$Q_M\left(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}\right)=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)},\ \forall\mathbf{x} \qquad [054]$$

de sorte que, dans ces conditions, l'indice de quantité de Malmquist est identique à l'indice de quantité implicite de Konüs-Pollak (équation [051]).

Tout cela est bel et bien, mais fort peu pratique, puisque l'on ne connaît en général ni la fonction d'agrégation, ni la fonction de coûts qui en découle. Mais avant d'aborder de front ce problème, il sied de faire un bref retour sur les indices de Divisia.

1.2.2.3 L'indice de Divisia et l'approche économique

Pour une valeur donnée du membre de gauche de [039], la décomposition donnée par le membre de droite ne dépend pas en général uniquement des valeurs initiales et terminales des prix et des quantités, mais bien de la totalité de leurs trajectoires sur l'intervalle [0,1]. En anglais, on dit que les indices de Divisia sont alors « path dependent » (voir notamment : Samuelson et Swamy 1974; Balk 2005). Toutefois, sous l'hypothèse d'un comportement optimisant et d'une fonction d'agrégation homothétique, il est démontré que la décomposition [039] est indépendante des trajectoires des variables de prix et de quantité.

Il a été en outre prouvé par plusieurs auteurs que, sous l'hypothèse d'un comportement d'optimisation et d'une fonction d'agrégation néoclassique, l'indice de prix de Divisia est égal à l'indice de prix de Konüs :

$$\int_0^1 \left[\sum_i s_i(t) \frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)} \right] dt = P_K\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}\right),\ \forall \mathbf{x} \qquad [055]$$

De cela on peut déduire que l'indice de quantité de Divisia est égal à l'indice de quantité de Konüs-Pollak [051] et à l'indice de quantité de Malmquist [054] :

$$\int_0^1 \left[\sum_i s_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \right] dt = Q_K\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}\right) = Q_M\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}\right) = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)},\ \forall \mathbf{x} \qquad [056]$$

Diewert (1981) conclut néanmoins : « Dans le présent survol, nous n'avons pas insisté sur l'approche Divisia des nombres-indices, puisque les données économiques ne sont pas habituellement collectées sur une base continue. Étant donné qu'il y a plusieurs approximations possibles des intégrales [de [039]] en s'appuyant sur des points de données discrets, l'approche Divisia de la théorie des nombres-indices ne circonscrit pas de manière significative l'éventail des formules de nombres-indices [en temps] discret, $P(p^0, p^1, x^0, x^1)$ et $Q(p^0, p^1, x^0, x^1)$, qui sont cohérentes avec l'approche Divisia. »[7] (p. 217)

1.2.3 INDICES EXACTS ET SUPERLATIFS

Diewert (1993, p. 19) affirme : « Il y a au moins trois manières différentes d'opérationnaliser les indices théoriques définis [dans la section 1.2.2] : (i) l'estimation économétrique; (ii) [l'établissement de] bornes non paramétriques; et (iii) la théorie des nombres-indices exacts. »[8]

Cette dernière approche est celle que privilégie Diewert (1992a). Le point de départ de la théorie des nombres-indices exacts consiste à choisir une forme fonctionnelle explicite pour la fonction d'agrégation. Grâce à un choix judicieux de forme fonctionnelle, et en s'appuyant sur l'hypothèse d'un comportement optimisant, il s'avère possible de calculer un indice de prix ou de quantité économique en n'utilisant que des données de prix et de quantité observables.

Les alinéas qui suivent énoncent les définitions pertinentes et la section 1.2.4 présente l'indice idéal de Fisher et l'indice de Törnqvist, auxquels conduit la théorie des nombres-indices exacts.

---

7 « We have not stressed the Divisia approach to index numbers in this survey since economic data typically are not collected on a continuous time basis. Since there are many ways of approximating the line integrals in (72) using discrete data points, the Divisia approach to index number theory does not significantly narrow down the range of discrete type index number formulae, $P(p^0, p^1, x^0, x^1)$ and $Q(p^0, p^1, x^0, x^1)$, that are consistent with the Divisia approach. »

8 « There are at least three different ways to operationalize the theoretical indexes defined in the previous section: (i) econometric estimation; (ii) nonparametric bounds; and (iii) the theory of exact index numbers. »

1.2.3.1 Indices exacts

Diewert et Hill (2009) clarifient la notion d'indice « exact », qui est définie sous l'hypothèse d'un agent économique optimisant une fonction d'agrégation néoclassique. Considérons un indice de prix $P(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)$ calculé selon une formule spécifique, en fonction des prix et quantités observés $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{x}^1$. Pour une fonction d'agrégation $F(\mathbf{x})$ donnée, on dit que l'indice $P(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)$ est exact par rapport à cette fonction d'agrégation si

$$P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [057]$$

où $c(\mathbf{p})$ est la fonction de coût dérivée de la fonction d'agrégation $F(\mathbf{x})$. La fonction d'agrégation étant supposée néoclassique, on peut affirmer en vertu de [045] que l'indice de prix $P(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)$ est égal à l'indice de prix théorique « vrai » de Konüs dans cette situation.

De même, un indice de quantité $Q(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)$ est exact par rapport à une fonction d'agrégation $F(\mathbf{x})$ donnée si

$$Q\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [058]$$

En vertu de [054], on peut affirmer qu'étant donné que $F(\mathbf{x})$ est supposée néoclassique, l'indice de quantité $Q(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)$ est égal à l'indice de quantité de Malmquist, qui est lui-même identique à l'indice de quantité implicite de Konüs-Pollak (équation [051]).

1.2.3.2 Fonction d'agrégation flexible

Les indices « superlatifs » sont définis plus loin par rapport aux fonctions d'agrégation ayant une forme fonctionnelle « flexible ». Telle que définie par Diewert (1976, p. 239), une forme fonctionnelle est flexible si elle est une approximation différentielle de second ordre, au voisinage de tout point, d'une fonction homogène de premier degré quelconque. Mathématiquement, une fonction $f(\mathbf{x})$ est flexible si, pour tout point $\mathbf{x}^*$ et pour toute fonction homogène de premier degré $g(\mathbf{x})$, il existe un jeu des paramètres de $f(\mathbf{x})$ tel que

$$f(\mathbf{x}^*)=g(\mathbf{x}^*)\,,\ \nabla f(\mathbf{x}^*)=\nabla g(\mathbf{x}^*)\ \text{ et }\ \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)=\nabla^2 g(\mathbf{x}^*) \qquad [059]$$

où $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ et $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ sont les vecteurs des dérivées premières de $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x}^*$, et $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ et $\nabla^2 g(\mathbf{x}^*)$ sont les matrices des dérivées secondes au point $\mathbf{x}^*$. En d'autres mots, $f(\mathbf{x})$ est flexible si, pour tout point $\mathbf{x}^*$ et pour toute fonction homogène de premier degré $g(\mathbf{x})$, il existe un jeu des paramètres de $f(\mathbf{x})$ tel que la valeur de $f(\mathbf{x}^*)$ et de $g(\mathbf{x}^*)$, leurs dérivées premières et leurs dérivées secondes coïncident.

1.2.3.3 Indices superlatifs

Un indice de prix ou de quantité est dit « superlatif » s'il est exact pour une forme fonctionnelle flexible. Tel que le démontre Diewert (1976), il existe une multitude d'indices superlatifs. L'attention se porte particulièrement sur l'indice idéal de Fisher et sur l'indice de Törnqvist. La présentation qui en est faite dans les lignes qui suivent est tirée de Diewert (1981).

<u>*Indice idéal de Fisher*</u>

Soit la fonction d'agrégation quadratique homogène du premier degré

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_i \sum_j x_i x_j a_{ij} \right)^{1/2}, \ \mathbf{x} \in S \qquad [060]$$

où **A** est une matrice de paramètres carrée symétrique et S est un sous-ensemble ouvert et convexe quelconque de l'orthant non négatif Ω tel que F est positive, homogène du premier degré et concave sur S (F est néoclassique).

On peut montrer (Diewert 1981, théorème 22) que l'indice de quantité idéal de Fisher est exact par rapport à la fonction d'agrégation [060]. L'indice de quantité idéal de Fisher est donné par

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \qquad [061]$$

où

$$Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i p_i^0 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \text{ est l'indice de quantité de Laspeyres} \qquad [062]$$

et

$$Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^1 x_i^0} \text{ est l'indice de quantité de Paasche} \qquad [063]$$

Étant donné que F est néoclassique, sous l'hypothèse d'un comportement optimal, on peut écrire, en vertu de [042]

$$\sum_i p_i x_i = C[F(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = F(\mathbf{x}) c(\mathbf{p}) \qquad [064]$$

où $c(\mathbf{p})$ est la fonction de coût unitaire duale de $F(\mathbf{x})$. Il s'ensuit que

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\sum_i p_i^0 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^1 x_i^0}} = \sqrt{\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)} \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}} = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [065]$$

À cet indice de quantité, on peut associer l'indice de prix *implicite* de Fisher

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{1}{Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \qquad [066]$$

On substitue la première égalité de [065] et on obtient

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \left(\sqrt{\frac{\sum_i p_i^0 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^1} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^1 x_i^1}}\right) \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} = \sqrt{\frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0}} \qquad [067]$$

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{P_P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0\right) P_L\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1\right)} \qquad [068]$$

où

$$P_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1} = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1} \text{ est l'indice de prix de Paasche} \qquad [069]$$

et

$$P_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0\right) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \text{ est l'indice de prix de Laspeyres} \qquad [070]$$

L'indice de prix implicite associé à l'indice de quantité de Fisher est l'indice de prix de Fisher.

De plus, en vertu de [042] et [065]

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{F\left(\mathbf{x}^0\right)}{F\left(\mathbf{x}^1\right)} \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)} = \frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [071]$$

En vertu de [065] et [071], les indices de quantité et de prix de Fisher sont exacts pour la fonction d'agrégation [060]. De plus, étant donné que la fonction d'agrégation [060] est une forme fonctionnelle flexible, la paire d'indices $P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ et $Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ est une paire d'indices *superlatifs*.

De même, soit la fonction de coût unitaire quadratique homogène du premier degré

$$c(\mathbf{p}) = (\mathbf{pBp})^{1/2} = \left(\sum_i \sum_j p_i p_j b_{ij}\right)^{1/2}, \ \mathbf{p} \in S^* \qquad [072]$$

où **B** est une matrice de paramètres carrée symétrique et S^* est un sous-ensemble ouvert et convexe quelconque de l'orthant non négatif Ω tel que la fonction c est positive, homogène du premier degré et concave sur S^* (c est néoclassique).

On peut montrer (Diewert 1981, théorème 23) que l'indice de prix idéal de Fisher donné par [068] est exact par rapport à la fonction d'agrégation qui est la duale de la fonction de coût unitaire [072].[9] L'existence et les propriétés de la fonction de coût unitaire [072] impliquent que cette fonction d'agrégation est néoclassique. En conséquence, sous l'hypothèse d'un comportement optimal, en vertu de [042], la relation [064] est valide. Il s'ensuit que

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1}} = \sqrt{\frac{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)} \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)}} = \frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [073]$$

À cet indice de prix, on peut associer l'indice de quantité *implicite* de Fisher

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{1}{P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \qquad [074]$$

Suivant un développement parallèle à [066-063], on montre que l'indice de quantité implicite de Fisher est identique à l'indice de quantité de Fisher défini en [061].

De plus, en vertu de [042] et [073]

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)} \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)} = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [075]$$

9 La fonction d'agrégation duale de la fonction de coût unitaire [072] n'est pas nécessairement la même que [060].

Étant donné que la fonction de coût unitaire [072] est une forme fonctionnelle flexible, la paire d'indices $P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ et $Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ est une paire d'indices *superlatifs*.

<u>*Fonctions translog et indices de Törnqvist*</u>

Soit la fonction d'agrégation flexible translog

$$\ln F(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \ln x_i \ln x_j \,,\ \mathbf{x} \in S \qquad [076]$$

où $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \forall\, i, j$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} = 0, \forall\, i$ et S est un ensemble ouvert convexe dans Ω tel que F est positive et concave sur S, ce qui implique que F est homogène du premier degré. On peut montrer (Diewert 1981, théorème 24) que l'indice de quantité de Törnqvist

$$Q_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^1}{x_i^0}\right)^{\frac{s_i^0 + s_i^1}{2}} \qquad [077]$$

est exact par rapport à la fonction d'agrégation [076]. À cet indice de quantité, on peut associer l'indice de prix *implicite* de Törnqvist

$$\widetilde{P}_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{1}{Q_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^1 x_i^1}{\sum_{i=1}^{N} p_i^0 x_i^0} \qquad [078]$$

Étant donné que la fonction d'agrégation [076] est une forme fonctionnelle flexible, la paire d'indices $\widetilde{P}_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ et $Q_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)$ est une paire d'indices *superlatifs*.

De même, soit la fonction de coût unitaire flexible translog

$$\ln c(\mathbf{p}) = \alpha^*_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha^*_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha^*_{ij} \ln p_i \ln p_j \,,\ \mathbf{p} \in S \qquad [079]$$

où $\sum_{i=1}^{N} \alpha^*_i = 1$, $\alpha^*_{ij} = \alpha^*_{ji}, \forall\, i, j$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha^*_{ij} = 0, \forall\, i$ et S est un ensemble ouvert convexe dans Ω tel que c est positive et concave sur S. On peut montrer (Diewert 1981, théorème 25) que l'indice de prix de Törnqvist

$$P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\frac{s_i^0+s_i^1}{2}} \qquad [080]$$

est exact par rapport à la fonction de coût unitaire [079]. À cet indice de quantité, on peut associer l'indice de quantité *implicite* de Törnqvist

$$\tilde{Q}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{1}{P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i^1x_i^1}{\sum_{i=1}^{N}p_i^0x_i^0} \qquad [081]$$

Étant donné que la fonction coût unitaire [079] est une forme fonctionnelle flexible, la paire d'indices $P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)$ et $\tilde{Q}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)$ est une paire d'indices *superlatifs*. Toutefois, il faut noter qu'en général la fonction de coût unitaire translog [079] n'est pas la duale de la fonction d'agrégation [076], de sorte que, en général, $\tilde{Q}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)\neq Q_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)$ et $\tilde{P}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)\neq P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)$.

1.2.4 MESURE DE LA PRODUCTIVITÉ AU MOYEN DE L'INDICE DE FISHER

Dans ce qui précède, la théorie économique des nombres-indices a été présentée au moyen de fonctions d'agrégation. Lorsqu'on interprète ces fonctions d'agrégation comme des fonctions de production, leur forme implique un seul produit. Mais la théorie économique des nombre indices et son extension aux indices exacts et superlatifs se généralisent aisément aux fonctions de transformation, avec plusieurs intrants et plusieurs produits, comme à la sous-section 1.1.1 ci-haut. Diewert (1992b) examine en détail les propriétés de l'indice idéal de Fisher dans ce contexte élargi et il compare ses propriétés à celles de l'indice de Törnqvist.

1.2.4.1 L'indice de Fisher à la lumière de l'approche axiomatique

Il y a plusieurs approches à la théorie des nombres-indices, mais les deux principales sont l'approche axiomatique et l'approche économique (Diewert 1993, p. 4). L'approche axiomatique est celle adoptée par Fisher lui-même et elle consiste à définir *a priori* les propriétés désirables que devrait posséder un nombre indice, puis à « tester » les différentes formules mathématiques proposées par rapport à ces propriétés désirables – c'est pourquoi Diewert désigne souvent l'approche axiomatique au moyen de l'expression « approche par test » (« test approach »).

Selon l'approche axiomatique, telle que présentée par Diewert (1992b), chaque test est en fait appliqué à une paire d'indices correspondants, l'un de quantité et l'autre de prix. Ces indices sont des fonctions mathématiques de quatre arguments vectoriels, qui sont les quantités et les prix de deux périodes ou de deux lieux dans l'espace. Ces fonctions doivent par définition respecter [036], que l'on écrit ici sous la forme

$$Q\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} \qquad [082]$$

où l'on suppose que tous les prix et toutes les quantités sont strictement positifs. Traditionnellement, les tests sont appliqués à l'indice de prix, étant entendu que l'indice implicite de quantité correspondant peut être calculé à partir de [082].

Diewert (1992b) dresse un inventaire des différents tests mis de l'avant dans les écrits sur les nombres-indices, il complète cette panoplie au moyen de tests « implicitement suggérés » par certains auteurs, et il arrive à une liste qui ne comprend pas moins de 20 tests. Il démontre ensuite que l'indice de Fisher défini en [061] est le seul à satisfaire aux quatre tests clés suivants :

1. Positivité :

$$P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) > 0 \qquad [083]$$

2. Symétrie par rapport au temps (« Time reversal test ») :

$$P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0\right) = \frac{1}{P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \qquad [084]$$

3. Symétrie par rapport aux quantités (« Quantity reversal test ») :

$$P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0\right) \qquad [085]$$

4. Symétrie par rapport aux prix (« Price reversal test ») :

$$\frac{1}{P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{1}{P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0} \qquad [086]$$

La propriété [086] est analogue à [085], transposée aux quantités, puisque, étant donné [082], [086] est équivalente à

$$Q\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = Q\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) \qquad [087]$$

En outre, Diewert démontre que l'indice de Fisher satisfait aussi les 16 autres tests, alors que les indices de Laspeyres et de Paasche ratent 3 des 20 tests et que celui de Törnqvist en échoue 9. Il conclut que, du point de vue axiomatique, l'indice de Fisher est supérieur à celui de Törnqvist[10].

---

[10] Cela est cependant énergiquement contesté par Hillinger (2003), qui soutient que les indices de Törnqvist sont nettement préférables aux indices de Fisher.

Déjà, Diewert (1976) favorisait l'emploi de l'indice de productivité de Fisher. Après avoir établi que tant l'indice de Törnqvist que celui de Fisher sont superlatifs, il donne trois raisons (p. 246-247) pour préférer ce dernier : la simplicité de la forme fonctionnelle; la compatibilité de l'indice de quantité de Fisher avec la théorie des préférences révélées (voir plus loin); la compatibilité de la paire d'indices de quantité et de prix de Fisher avec, tant une fonction d'agrégation linéaire (élasticité de substitution infinie) qu'une fonction d'agrégation Leontief (élasticité de substitution infinie).

Revenons sur la compatibilité de l'indice de quantité de Fisher avec la théorie de la préférence révélée. Si $\mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^1 \leq \mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^0 > \mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^1$, alors $\mathbf{x}^0$ est révélé préféré à $\mathbf{x}^1$, puisque, quand le consommateur a la possibilité de s'offrir n'importe quel des deux ($\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$), il choisit $\mathbf{x}^0$ et, quand il choisit $\mathbf{x}^1$, c'est que $\mathbf{x}^0$ coûte plus cher. Dans ces conditions, étant donné [061],

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0}} < 1 \qquad [088]$$

Si $\mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^1 > \mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^0 \leq \mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^1$, alors $\mathbf{x}^1$ est révélé préféré à $\mathbf{x}^0$, puisque, quand le consommateur a la possibilité de s'offrir n'importe lequel des deux ($\mathbf{p} = \mathbf{p}^1$), il choisit $\mathbf{x}^1$ et, quand il choisit $\mathbf{x}^0$, c'est que $\mathbf{x}^1$ coûte plus cher. Dans ces conditions,

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0}} > 1 \qquad [089]$$

Si $\mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^1 = \mathbf{p}^0\,\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^1\,\mathbf{x}^1$, alors $\mathbf{x}^1$ et $\mathbf{x}^0$ sont révélés indifférents. Dans ces conditions,

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0}} = 1 \qquad [090]$$

Il s'ensuit que, même si les préférences ne sont pas homothétiques, l'indice de quantité de Fisher indique correctement dans quelle direction change l'utilité selon la théorie de la préférence révélée.

1.2.4.2 L'indice de productivité de Fisher : définition

La technologie est représentée par une fonction de transformation

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = F\left(y_1, \cdots, y_M, x_1, \cdots, x_N\right) = 0 \qquad [091]$$

La même technologie peut aussi être représentée par la fonction de production de l'un des produits sous contrainte des quantités données des autres produits et des intrants :

$$y_1 = f\left(y_2, \cdots, y_M, x_1, \cdots, x_N\right) = f\left(y_2, \cdots, y_M, \mathbf{x}\right) = \max_{y_1}\left\{y_1 : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0\right\} \qquad [092]$$

ou par la fonction de besoin de l'un des intrants (« input requirements function ») sous contrainte des quantités données des produits et des autres intrants :

$$x_1 = g(y_1, \cdots, y_M, x_2, \cdots, x_N) = g(\mathbf{y}, x_2, \cdots, x_N) = \min_{x_1} \{x_1 : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0\} \quad [093]$$

Dans ce contexte, on distingue l'indice de Fisher du volume de la production

$$Q_F^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \sqrt{Q_L^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) Q_P^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)} \quad [094]$$

et l'indice de Fisher du volume des intrants

$$Q_F^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \sqrt{Q_L^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) Q_P^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)} \quad [095]$$

où les indices de volume de la production et des intrants de Laspeyres et de Paasche sont donnés par

$$Q_L^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^0} = \frac{\sum_i p_i^0 y_i^1}{\sum_i p_i^0 y_i^0} \quad [096]$$

$$Q_P^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^0} = \frac{\sum_i p_i^1 y_i^1}{\sum_i p_i^1 y_i^0} \quad [097]$$

$$Q_L^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i w_i^0 x_i^1}{\sum_i w_i^0 x_i^0} \quad [098]$$

$$Q_P^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i w_i^1 x_i^1}{\sum_i w_i^1 x_i^0} \quad [099]$$

Enfin, on définit l'indice de productivité de Fisher :

$$\Pi_F(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{Q_F^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)}{Q_F^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)} \quad [100]$$

Diewert (1992b) montre que l'indice de productivité de Fisher est un indice superlatif selon trois approches convergentes. Il démontre successivement :

- **Si** l'on définit un indice théorique de productivité comme le rapport de la fonction de revenu de la période 1 sur celle de la période 0, et
  si la fonction de revenu épouse la forme flexible définie en [103] ci-après,
  alors l'indice de productivité de Fisher est un indice exact pour cette fonction.
  L'indice de productivité de Fisher est donc un indice superlatif.
- **Si** l'on définit un indice théorique de productivité comme le rapport d'un indice de volume de production de Malmquist sur un indice du volume d'intrants de Malmquist,
  si la fonction de production épouse la forme flexible définie en [113] ci-après, et
  si la fonction de besoin d'intrants épouse la forme flexible définie en [108] ci-après,
  alors l'indice de volume de production de Fisher est exact pour cette fonction de production et

l'indice de volume d'intrants de Fisher est exact pour cette fonction d'intrants.

Les indices de volume de production, de volume d'intrants et de productivité de Fisher sont donc des indices superlatifs.

- **Si** l'on définit un indice théorique de productivité comme le rapport de deux fonctions de distance comme en [116] et [117] ci-après et

  si ces fonctions de distance épousent la forme flexible définie en [118] ci-après,

  alors l'indice de productivité de Fisher est un indice exact pour cette fonction.

  L'indice de productivité de Fisher est donc un indice superlatif.

1.2.4.3 L'indice de productivité superlatif de Fisher et le rapport des fonctions de revenu

Soit la « vraie » fonction de revenu :

$$r^{*t}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \equiv \max_{y}\left\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} : y_1 = f^{t}(y_2,\cdots,y_M,\mathbf{x})\right\} \qquad [101]$$

L'indice suscrit t indique que cette fonction évolue dans le temps en fonction de l'évolution de la productivité multifactorielle. On définit une paire d'indices théoriques de productivité :

$$\Pi^{t}_{Th1}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{x}^{t}\right) = \frac{r^{*1}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{x}^{t}\right)}{r^{*0}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{x}^{t}\right)},\ t = 0,\ 1 \qquad [102]$$

On suppose que la technologie est à rendements constants et que la fonction de revenu $r^{*t}(\mathbf{p}^*,\mathbf{x}^*)$ est continue et doublement différentiable au point $\mathbf{p}^* >> \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^* >> \mathbf{0}$, avec $r^{*t}(\mathbf{p}^*,\mathbf{x}^*) > 0$.

On considère pour la fonction de revenu la forme fonctionnelle suivante

$$r^{t}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \equiv \sigma_t\left[\mathbf{p}'\mathbf{A}\mathbf{p}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{p}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}\mathbf{p}'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}\right]^{1/2},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}',\ \mathbf{C} = \mathbf{C}' \qquad [103]$$

Diewert (1992b, théorème 3) montre que, pour toute paire de vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^t$ et $\boldsymbol{\beta}^t$ tels que $\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{p}^* \neq 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^* \neq 0$, il existe des matrices symétriques **A** et **C**, ainsi qu'une matrice $\mathbf{B}^t$ telle que $\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{B}^{t} = \mathbf{0}'_N$ et $\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_M$; la fonction [103] définie par ces trois matrices **A**, **C** et $\mathbf{B}^t$ est une approximation de second ordre de r^* au point $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{x}^*$, au sens de [059]. La forme fonctionnelle de [103] est donc flexible. On note que les matrices **A** et **C** sont fixes, tandis que les autres paramètres changent dans le temps.

Supposons maintenant que les fonctions de revenu $r^0(\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^0)$ et $r^1(\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^1)$ soient de la forme [103] et que leurs paramètres satisfassent, <u>soit</u> les conditions $\mathbf{p}^{0}\mathbf{B}^{0} = \mathbf{0}'_N$, $\mathbf{B}^{0}\mathbf{x}^{0} = \mathbf{0}_M$, $\boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{p}^{1} = 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\mathbf{x}^{1} = 0$, <u>soit</u>

les conditions $\mathbf{p}^1\mathbf{B}^1 = \mathbf{0}'_N$, $\mathbf{B}^1\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}_M$, $\boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{p}^0 = 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\mathbf{x}^0 = 0$. Diewert (1992b, théorème 4) montre que, sous l'hypothèse de comportement optimal, l'indice de productivité de Fisher défini en [100] est égal à chacun des deux indices théoriques définis en [102] :

$$\Pi_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1,\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = \Pi^0_{Th1}\left(\mathbf{p}^t,\mathbf{x}^t\right) = \Pi^1_{Th1}\left(\mathbf{p}^t,\mathbf{x}^t\right) \qquad [104]$$

L'indice de productivité de Fisher est donc exact par rapport à la forme fonctionnelle [103]. Par ailleurs, les conditions du théorème 4 sont compatibles, soit avec une forme flexible de $r^0(\mathbf{p},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{x}^0$, si $\boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{p}^1 = 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\mathbf{x}^1 = 0$, soit avec une forme flexible de $r^1(\mathbf{p},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{x}^1$, si $\boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{p}^0 = 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\mathbf{x}^0 = 0$.

1.2.4.4 L'indice de productivité superlatif de Fisher et les indices de quantité de Malmquist

Indice de quantité des intrants

À partir de la fonction de production [092], on définit la « vraie » fonction de distance (ou de dégonflement) des intrants (« input deflation function ») :

$$D^{*t}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \equiv \max_{\delta>0}\left\{\delta : y_1 \leq f^t\left(y_2,\cdots,y_M,\frac{x_1}{\delta},\cdots,\frac{x_N}{\delta}\right)\right\} \qquad [105]$$

Le suscrit t indique que cette fonction évolue dans le temps en fonction de l'évolution de la productivité multifactorielle. On définit ensuite la paire d'indices théoriques de volume d'intrants de Malmquist

$$Q^0_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = \frac{D^{*0}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^1\right)}{D^{*0}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^0\right)} = D^{*0}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^1\right) \qquad [106]$$

$$Q^1_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = \frac{D^{*1}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^1\right)}{D^{*1}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^0\right)} = \frac{1}{D^{*1}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^0\right)} \qquad [107]$$

puisque, sous l'hypothèse d'efficacité technique, $D^{*t}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}^t,\mathbf{x}^t\right) = 1$. On suppose que la technologie est à rendements constants et que la fonction de distance est continue et doublement différentiable.

On considère pour la fonction de distance la forme fonctionnelle suivante

$$D^t_{\mathbf{x}}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \left[\left(\mathbf{y}'\mathbf{A}^t\mathbf{y}\right)^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}^{-1}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}\left(\mathbf{y}^{-1}\right)'\mathbf{B}^t\mathbf{x}\right]^{1/2},\ \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{t\,\prime},\ \mathbf{C} = \mathbf{C}' \qquad [108]$$

où l'on définit $\mathbf{y}^{-1} = \left(y_1^{-1},\cdots,y_M^{-1}\right)$.

Soit $\mathbf{y}^* >> \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}^* >> \mathbf{0}$. Diewert (1992b, théorème 5) montre que : (1) pour toute paire de vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^t$ et $\boldsymbol{\beta}^t$ tels que $\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}^{*-1} \neq 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^* \neq 0$, il existe des matrices symétriques $\mathbf{A}^t$ et $\mathbf{C}$ telles que $\mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{A}^t\mathbf{y}^* = 1$ et $\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{C}\mathbf{x}^* = 1$, ainsi qu'une matrice $\mathbf{B}^t$ telle que $\left(\mathbf{y}^{*\prime}\right)^{-1}\mathbf{B}^t = \mathbf{0}'_N$ et $\mathbf{B}^t\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_M$; (2) la fonction [108] définie par ces trois matrices $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}^t$ est une approximation de second ordre de $D_{\mathbf{x}}^{*t}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{x}^*$, au sens de [059]. La forme fonctionnelle de [108] est donc flexible.

Supposons maintenant que les fonctions de distance $D_{\mathbf{x}}^0(\mathbf{y},\mathbf{x})$ et $D_{\mathbf{x}}^1(\mathbf{y},\mathbf{x})$ soient de la forme [108] et que leurs paramètres satisfassent pour t = 0, 1 la condition $\left(\mathbf{y}^{t\,\prime}\mathbf{A}^t\mathbf{y}^t\right)^{-1}\mathbf{x}^{t\,\prime}\mathbf{C}\mathbf{x}^t = 1$, et, <u>soit</u> les conditions $\left(\mathbf{y}^{0\,\prime}\right)^{-1}\mathbf{B}^0 = \mathbf{0}'_N$ et $\boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\left(\mathbf{y}^1\right)^{-1} = 0$, <u>soit</u> les conditions $\left(\mathbf{y}^{1\,\prime}\right)^{-1}\mathbf{B}^1 = \mathbf{0}'_N$ et $\boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\left(\mathbf{y}^0\right)^{-1} = 0$. Diewert (1992b, théorème 6) montre que, sous l'hypothèse de comportement optimal (minimisation des coûts), l'indice de volume des intrants de Fisher défini en [095] est égal à chacun des deux indices théoriques définis en [106] et [107] :

$$Q_F^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = Q_{\mathbf{x}M}^0\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = Q_{\mathbf{x}M}^1\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) \qquad [109]$$

L'indice de volume des intrants de Fisher est donc exact par rapport à la forme fonctionnelle [108]. Par ailleurs, les conditions du théorème 6 sont compatibles, <u>soit</u> avec une forme flexible de $D_{\mathbf{x}}^0(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{x}^0$, si $\left(\mathbf{y}^{0\,\prime}\right)^{-1}\mathbf{B}^0 = \mathbf{0}'_N$ et $\boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\left(\mathbf{y}^1\right)^{-1} = 0$, <u>soit</u> avec une forme flexible de $D_{\mathbf{x}}^1(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{x}^1$, si $\left(\mathbf{y}^{1\,\prime}\right)^{-1}\mathbf{B}^1 = \mathbf{0}'_N$ et $\boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\left(\mathbf{y}^0\right)^{-1} = 0$.

<u>Indice de quantité des produits</u>

À partir de la fonction de production [092], on définit la « vraie » fonction de distance (ou de dégonflement) des produits (« output deflation function ») :

$$D_{\mathbf{y}}^{*t}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \equiv \min_{\delta>0}\left\{\delta : g^t\left(\frac{y_1}{\delta},\cdots,\frac{y_M}{\delta},x_2,\cdots,x_N\right) \leq x_1\right\} \qquad [110]$$

L'indice suscrit t indique que cette fonction évolue dans le temps en fonction de l'évolution de la productivité multifactorielle. On définit ensuite la paire d'indices théoriques de volume d'intrants de Malmquist

$$Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)}=D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right) \qquad [111]$$

$$Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{1}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)} \qquad [112]$$

puisque, sous l'hypothèse d'efficacité technique, $D_{\mathbf{y}}^{*t}\left(\mathbf{y}^{t},\mathbf{x}^{t}\right)=1$. On suppose que la technologie est à rendements constants et que la fonction de distance est continue et doublement différentiable.

On considère pour la fonction de distance la forme fonctionnelle suivante

$$D_{\mathbf{y}}^{t}(\mathbf{y},\mathbf{x})=\left[\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}\left(\mathbf{x}'\mathbf{C}^{t}\mathbf{x}\right)^{-1}+\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^{-1}\right]^{1/2},\ \mathbf{A}=\mathbf{A}',\ \mathbf{C}^{t}=\mathbf{C}^{t\,\prime} \qquad [113]$$

où l'on définit $\mathbf{x}^{-1}=\left(x_{1}^{-1},\cdots,x_{N}^{-1}\right)$.

Soit $\mathbf{y}^* \gg \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}^* \gg \mathbf{0}$. Diewert (1992b, théorème 7) montre que : (1) pour toute paire de vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^t$ et $\boldsymbol{\beta}^t$ tels que $\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}^*\neq 0$ et $\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^{*-1}\neq 0$, il existe des matrices symétriques **A** et $\mathbf{C}^t$ telles que $\mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{A}\mathbf{y}^*=1$ et $\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{C}^{t}\mathbf{x}^*=1$, ainsi qu'une matrice $\mathbf{B}^t$ telle que $\mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{B}^{t}=\mathbf{0}'_{N}$ et $\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^{*-1}=\mathbf{0}_{M}$; (2) la fonction [113] définie par ces trois matrices **A**, $\mathbf{C}^t$ et $\mathbf{B}^t$ est une approximation de second ordre de $D_{\mathbf{y}}^{*t}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{x}^*$, au sens de [059]. La forme fonctionnelle de [113] est donc flexible.

Supposons maintenant que les fonctions de distance $D_{\mathbf{y}}^{0}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ et $D_{\mathbf{y}}^{1}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ soient de la forme [113] et que leurs paramètres satisfassent pour t = 0, 1 la condition $\mathbf{y}^{t\,\prime}\mathbf{A}\mathbf{y}^{t}\left(\mathbf{x}^{t\,\prime}\mathbf{C}^{t}\mathbf{x}^{t}\right)^{-1}=1$, et, <u>soit</u> les conditions $\mathbf{B}^{0}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1}=\mathbf{0}'_{M}$ et $\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1}=0$, <u>soit</u> les conditions $\mathbf{B}^{1}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1}=\mathbf{0}'_{M}$ et $\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1}=0$. Diewert (1992b, théorème 8) montre que, sous l'hypothèse de comportement optimal (maximisation du revenu), l'indice de volume des produits de Fisher défini en [095] est égal à chacun des deux indices théoriques définis en [111] et [112] :

$$Q_{F}^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right) \qquad [114]$$

L'indice de volume des produits de Fisher est donc exact par rapport à la forme fonctionnelle [113]. Par ailleurs, les conditions du théorème 6 sont compatibles, <u>soit</u> avec une forme flexible de $D_{\mathbf{y}}^{0}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point

$\mathbf{y}^0$, $\mathbf{x}^0$, si $\mathbf{B}^0\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = \mathbf{0}'_M$ et $\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = 0$, soit avec une forme flexible de $D^1_{\mathbf{y}}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ au point $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{x}^1$, si $\mathbf{B}^1\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = \mathbf{0}'_M$ et $\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = 0$.

La productivité comme rapport des indices de quantité des produits et des intrants

À partir de [109] et [114], on peut définir l'indice de productivité de Fisher [100] qui, sous les conditions des théorèmes 6 et 8 de Diewert (1992b)[11], respecte la quadruple égalité

$$\Pi_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1,\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = \frac{Q_F^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q_F^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} = \frac{Q^0_{\mathbf{y}M}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q^0_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} = \frac{Q^0_{\mathbf{y}M}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q^1_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} = \frac{Q^1_{\mathbf{y}M}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q^1_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} = \frac{Q^1_{\mathbf{y}M}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q^0_{\mathbf{x}M}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} \qquad [115]$$

La productivité selon l'approche de Diewert

Diewert (1992b) emprunte cependant un chemin différent pour arriver à l'indice de productivité de Fisher. Il définit la paire d'indices théoriques de productivité :

$$\Pi^0_{Th2}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right) = \frac{D^{*0}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^1\right)}{D^{*0}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^0\right)} = D^{*0}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^1\right) \qquad [116]$$

$$\Pi^1_{Th2}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right) = \frac{D^{*1}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^1,\mathbf{x}^1\right)}{D^{*1}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^0\right)} = \frac{1}{D^{*1}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^0,\mathbf{x}^0\right)} \qquad [117]$$

où, dans chaque énoncé, la deuxième égalité découle de l'hypothèse de comportement optimal. On peut interpréter ces indices à la lumière de la définition [110] des fonctions de distance des produits. Si la productivité est supérieure en 1, l'indice [116] indique dans quelle proportion il faudrait réduire la production de la période 1 pour pouvoir la produire avec les intrants de la période 1 et la productivité (la technologie) de la période 0; l'indice [117] indique dans quelle proportion on aurait pu augmenter la production de la période 0 avec les intrants de la période 0, si on avait pu bénéficier de la productivité de la période 1.

---

[11] Il est à noter qu'on ne suppose pas nécessairement que les paramètres de [108] et ceux de [113] soient égaux, bien qu'ils soient représentés par les mêmes symboles. Car ces deux fonctions de distance sont vues comme des approximations de second ordre des « vraies » fonctions.

On considère pour la fonction de distance la forme fonctionnelle suivante

$$D_{\mathbf{y}}^{t}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \sigma^{t}\left[\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}(\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x})^{-1} + \boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^{-1}\right]^{1/2},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}',\ \mathbf{C} = \mathbf{C}' \qquad [118]$$

où l'on définit $\mathbf{x}^{-1} = \left(x_1^{-1},\cdots,x_N^{-1}\right)$ et où les paramètres satisfont la condition suivante :

$$\sigma^{t}\left[\mathbf{y}^{t\,\prime}\mathbf{A}\mathbf{y}^{t}\left(\mathbf{x}^{t\,\prime}\mathbf{C}\mathbf{x}^{t}\right)^{-1}\right]^{1/2} = 1 \qquad [119]$$

et <u>l'un</u> des deux ensembles de conditions suivants :

<u>Soit</u> $\mathbf{B}^{0}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1} = \mathbf{0}'_{M}$, $\mathbf{y}^{0\,\prime}\mathbf{B}^{0} = \mathbf{0}'_{N}$, $\boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{y}^{1} = 0$,

$$\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1} = 0,\ \boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{y}^{1}\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1} = 0 \text{ et } \mathbf{y}^{0\,\prime}\mathbf{B}^{1}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1} = 0 \qquad [120]$$

<u>Soit</u> $\mathbf{B}^{1}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1} = \mathbf{0}'_{M}$, $\mathbf{y}^{1\,\prime}\mathbf{B}^{1} = \mathbf{0}'_{N}$, $\boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{y}^{0} = 0$,

$$\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1} = 0,\ \boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{y}^{0}\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^{0}\right)^{-1} = 0 \text{ et } \mathbf{y}^{1\,\prime}\mathbf{B}^{0}\left(\mathbf{x}^{1}\right)^{-1} = 0 \qquad [121]$$

Diewert (1992b, théorème 9) montre que, sous l'hypothèse de comportement optimal (maximisation du revenu étant donné les intrants et minimisation du coût étant donné les produits), l'indice de de productivité de Fisher défini en [100] est égal à chacun des deux indices théoriques définis en [116] et [117] :

$$\begin{aligned}&\Pi_{F}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1},\mathbf{w}^{0},\mathbf{w}^{1},\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)\\ &\quad = \frac{Q_{F}^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{F}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^{0},\mathbf{w}^{1},\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)} = \Pi_{Th2}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right) = \Pi_{Th2}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)\end{aligned} \qquad [122]$$

Les restrictions [120] sont compatibles avec la possibilité que $D_{\mathbf{y}}^{0}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ soit une forme flexible au point $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{x}^0$, et les restrictions [121] sont compatibles avec la possibilité que $D_{\mathbf{y}}^{1}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ soit une forme flexible au point $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{x}^1$.

1.2.4.5 Conclusion

Dans les alinéas qui précèdent, on reprend l'argumentation qu'a développée Diewert (1976, 1992b) en faveur de l'indice de Fisher. Selon Diewert, la justification économique de l'indice de Fisher est parallèle et d'égale force à celle de Caves, Christensen et Diewert (1982) en faveur de l'indice de Törnqvist.

Diewert (1992b) a en outre montré que l'indice de Fisher respecte davantage que celui de Törnqvist les critères de l'approche axiomatique. Il conclut :

> « Si l'on compare l'approche axiomatique aux indices de productivité avec l'approche économique, il ressort que : (i) l'approche axiomatique souffre d'un manque de consensus quant aux tests ou axiomes qui seraient appropriés; (ii) l'approche économique requiert l'hypothèse d'un comportement concurrentiel de preneur de prix et l'hypothèse de rendements constants (ou décroissants) à l'échelle. Ainsi, les deux approches ont leurs faiblesses. Toutefois, nous avons présenté des justifications fortes en faveur de l'utilisation de l'indice de productivité de Fisher selon les *deux* approches, ce qui devrait faire taire les objections contre son utilisation en maints contextes. »[12]

Diewert (1992a, p. 196) reprend le même point de vue.[13]

Ajoutons que Diewert préconise l'utilisation d'indices enchaînés (1976, p. 245, note 16; 1978; 1981, p. 210; 1987a, p. 87-89; 1992a, p. 190). Cette pratique est maintenant largement répandue et elle a été adoptée par Statistique Canada.

---

[12] « If we compare the test approach to productivity indexes with the economic approach, the following points emerge: (i) the test approach suffers from a lack of consensus on what the appropriate tests or axioms should be; (ii) the economic approach requires the assumption of competitive price taking behavior and the assumption of constant (or diminishing) returns to scale. Thus both approaches have their weaknesses. However, we have presented strong justifications for the use of the Fisher productivity index from *both* viewpoints, which should reduce objections to its use in many contexts. »

[13] Cette thèse, rappelons-le, est cependant énergiquement contestée par Hillinger (2003), qui soutient que les indices de Törnqvist sont nettement préférables aux indices de Fisher.

2. MÉTHODOLOGIE DE STATISTIQUE CANADA

La méthodologie de Statistique Canada est en constante évolution et il n'est pas aisé d'en faire un compte rendu à jour. Cela dit, le *Guide de l'utilisateur* de Baldwin, Gu et Yan (2007) semble refléter les pratiques courantes de Statistique Canada et c'est sur ce document et sur les références qui y sont citées que s'appuie l'exposé qui suit.

2.1 Description générale

La méthode d'estimation de la PMF de Statistique Canada s'appuie sur le principe de la décomposition de la croissance (« growth accounting » en anglais). L'exercice consiste d'abord à mesurer la croissance de la production, puis à mettre celle-ci en relation avec la croissance des intrants, pour attribuer à chacun des intrants ou groupe d'intrants pris en compte une fraction de la croissance de la production; le résidu (la fraction de la croissance qui n'est attribuée à aucun intrant) est ensuite interprété comme un effet de la croissance de la « productivité multifactorielle ».

À ce propos, Harchaoui et autres (2004, p. 6) écrivaient : « Le programme de Statistique Canada des mesures de la productivité [...] est, d'abord, exclusivement axé sur des comparaisons reposant sur des mesures de la croissance de la productivité par opposition à des mesures des niveaux de productivité. On préfère actuellement les taux de croissance, parce qu'ils évitent les problèmes méthodologiques et de données associés aux comparaisons des niveaux de productivité. ». Dans Baldwin, Gu et Yan (2007), bien que la méthode d'estimation soit toujours formulée en termes de la croissance de la PMF, on ne trouve aucune référence à cette restriction. Cette évolution est d'ailleurs confirmée par Baldwin et Gu (2008, p. 7) : « La productivité peut être mesurée du point de vue du niveau ou de la croissance, tout comme le PIB. Mais comme pour le PIB, on porte une attention particulière à la croissance de la productivité, sans oublier les comparaisons de la croissance de la productivité d'un pays à l'autre. » Ce point de vue est justifié par la demande de comparaisons internationales (Baldwin et Gu 2008, p. 16-18).

L'estimation de la PMF s'applique exclusivement au secteur des entreprises. Car dans le secteur non commercial, il n'existe pas de transactions de marché qui permettent de mesurer la valeur de la production, de sorte que celle-ci est estimée essentiellement à partir des coûts : la PMF y est donc constante par construction.[14]

Le Secteur des comptes canadiens de productivité de Statistique Canada compte maintenant *deux* programmes de productivité multifactorielle : le programme de PMF par principal secteur et le programme de PMF par industrie, aussi appelé programme KLEMS de productivité par industrie.

- Le programme de PMF par principal secteur élabore des indices annuels de PMF par rapport à la valeur ajoutée (c'est-à-dire au PIB) pour l'ensemble du secteur des entreprises et pour 12 groupes d'industries qui constituent les « secteurs principaux », ainsi que pour 4 agrégations spéciales. Ce programme s'appuie principalement, comme le suivant, sur les TES annuels. Mais comme les TES sont publiés avec trois ans de retard, les indices de PMF des trois années qui suivent la dernière production des TES sont estimés à partir de projections obtenues de la Division des comptes de revenus et des dépenses.
- Le programme de PMF par industrie développe la base de données KLEMS et produit des indices annuels de PMF pour le secteur des entreprises, par industrie, aux niveaux d'agrégation S, M et L des TES de Statistique Canada, qui sont définis en fonction du Système de classification industrielle d'Amérique du Nord (SCIAN). Le programme KLEMS estime la PMF sous trois formes : par rapport à la valeur ajoutée, par rapport à la production brute et par rapport au « produit sectoriel » (le produit sectoriel est calculé en soustrayant de la production brute les transactions intra-industrie estimées). Le concept de PMF interindustrielle (Harchaoui et autres 2004, p. 13) semble avoir été abandonné. Le programme KLEMS ne fait pas de projections au-delà des derniers TES disponibles.

Le Secteur des comptes canadiens de productivité a également un programme trimestriel, qui ne nous concerne pas directement ici : il fournit des estimations trimestrielles de la productivité du travail et des coûts de main-d'œuvre au niveau agrégé pour 15 regroupements d'industries. Finalement, le programme provincial annuel, qui fait partie intégrante des Comptes économiques provinciaux, fournit les estimations de l'emploi, des heures travaillées, de la productivité du travail et des coûts de main-d'œuvre à un niveau détaillé par industrie pour chacune des provinces et territoires[15]. Ce programme ne produit pas

[14] « Les problèmes rattachés à la mesure de la croissance de la production réelle sont particulièrement importants lorsqu'il s'agit de mesurer la production réelle dans le secteur de l'administration publique et non commercial. En général, lorsque les opérations sur le marché ne sont pas disponibles pour mesurer les recettes, on mesure la production par les paiements consacrés aux facteurs dans le secteur non commercial. Les prix des entrées servent à déflater cette mesure, ce qui donne par construction une croissance de la productivité nulle. C'est pour cette raison que les Comptes de la productivité se concentrent principalement sur le secteur commercial ou des entreprises, malgré la demande des utilisateurs qui souhaitent avoir des estimations plus complètes. » (Balwin et Gu 2008, p. 16).

[15] http://www.statcan.gc.ca/cgi-bin/imdb/p2SV_f.pl?Function=getSurvey&SDDS=5103&lang=en&db=imdb&adm=8&dis=2; consulté le 30 avril 2009.

d'estimations de la PMF à l'échelle des provinces, mais les données qu'il fournit sur le travail pourront être utilisées pour l'estimation de la PMF au Québec.

2.2 Décomposition de la croissance

La méthode d'estimation de la PMF de Statistique Canada s'appuie sur le principe de la décomposition de la croissance. Ce principe est représenté par l'équation suivante :

$$P\dot{M}F = \dot{Q} - \sum_i \frac{P_i X_i}{PQ} \dot{X}_i = \dot{Q} - \sum_i s_i \dot{X}_i \qquad [123]^{16}$$

où

$P\dot{M}F$ est le taux de croissance de la PMF;

$\dot{Q}$ est le taux de croissance du volume de la production (quel que soit le concept de production utilisé) : $\dot{Q} = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}$;

P est le prix du produit;

$\dot{X}_i$ est le taux de croissance du volume du facteur ou intrant intermédiaire i : $\dot{X} = \frac{1}{X_i}\frac{dX_i}{dt}$;

P_i est le prix du facteur ou intrant intermédiaire i;

s_i est la part du facteur ou intrant intermédiaire i dans la valeur du produit : $s_i = \frac{P_i X_i}{\sum_h P_h X_h} = \frac{P_i X_i}{PQ}$

Compte tenu des différences de notation (notamment dans la représentation de la dérivée logarithmique par rapport au temps), l'équation [123] est semblable à [011] ou à [031].

Puisque les données économiques ne sont pas observées en temps continu, Statistique Canada utilise l'approximation en temps discret suivante :

$$\Delta \ln PMF_t = \Delta \ln Q_t - \sum_i \bar{s}_{it} \Delta \ln X_{it} \text{, avec } \Delta x_t = x_t - x_{t-1} \text{ et } \bar{s}_{it} = \left(s_{it} + s_{i,t-1}\right)/2 \qquad [124]^{17}$$

En exploitant les propriétés des logarithmes $\ln z^v = v \ln z$ et $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, on peut écrire

[16] Équation (9) dans Baldwin et autres (2007).

[17] Équation (9A) dans Baldwin et autres (2007).

$$\Delta \ln PMF_t = \ln\left(Q_t / Q_{t-1}\right) - \ln \prod_i \left[\left(X_{it} / X_{i,t-1} \right)^{\bar{s}_{it}} \right] \qquad [125]$$

où l'on reconnaît dans le deuxième terme du membre de droite l'indice de quantité de Törnqvist défini par [077].

Sachant que Q et les X_i sont en pratique des indices de volume enchaînés de Fisher (voir plus loin), on peut se demander pourquoi le Secteur des comptes canadiens de productivité a choisi à cette ultime étape du calcul un indice de Törnqvist. C'est vraisemblablement en raison de la ressemblance entre la formule de l'indice de Törnqvist dans [124] et celle de l'indice de Divisia dans [123]. L'utilisation d'indices de Fisher aux étapes antérieures est commandée par l'obligation de cohérence avec les Comptes nationaux, puisque, lors de la dernière révision historique de ceux-ci, Statistique Canada a adopté les indices en chaîne de Fisher[18]. Comme les indices de Fisher et de Törnqvist sont une approximation l'un de l'autre (Diewert 1976, 1978), et que, de toute façon, ni l'un, ni l'autre n'est additif, on peut présumer que l'emploi de l'un ou de l'autre à différentes étapes du calcul a probablement un impact assez faible.

Cela dit, la documentation de Statistique Canada ne permet pas de déterminer avec certitude à quelle étape exactement on applique un indice de Törnqvist à des composantes qui sont des indices de volume enchaînés de Fisher. Cette question a été clarifiée dans un échange de correspondance avec Wulong Gu, de Statistique Canada. Les points qui ressortent de cette correspondance sont :

1. Étant donné la non-additivité des indices de Fisher, ceux-ci sont calculés pour chacune des 88 industries de la base de données KLEMS, puis, pour toute agrégation (comme l'ensemble des industries productrices de biens ou l'ensemble du secteur des entreprises), à partir des indices de Laspeyres et de Paasche agrégés[19] (et non pas en agrégeant les indices de Fisher des industries)[20].
2. De même, les indices de PMF (par rapport à la valeur ajoutée, à la production brute ou à la production sectorielle) sont calculés pour chacune des industries, puis, pour toute agrégation (comme les industries productrices de biens ou l'ensemble du secteur des entreprises), à partir des indices de quantité de Fisher des agrégats correspondants.
3. Dans le calcul de la PMF par rapport à la valeur ajoutée, l'indice de Törnqvist de [125] combine deux indices de quantité de Fisher, l'un du travail et l'autre du capital.

---

[18] Échange de correspondance avec Wulong Gu de Statistique Canada.

[19] Contrairement à l'indice de Fisher, l'indice de Laspeyres et l'indice de Paasche sont additifs en ce sens que l'indice relatif à un agrégat peut être calculé de façon équivalente directement ou par agrégations successives.

[20] Cela dit, selon Wulong Gu, il semble que la non-additivité se manifeste de façon sensible seulement pour le capital : « I found that for GDP, gross output, intermediate inputs, and labour inputs, two-or-more-stage aggregation and one-stage aggregation yield similar estimates. But the capital service estimates from one-stage vs. two-stage aggregations differ slightly. » (correspondance du 15 mai 2009).

4. Dans le calcul de la PMF par rapport à la production brute ou à la production sectorielle, l'indice de Törnqvist de [125] combine trois indices de quantité de Fisher, le premier du travail et le deuxième du capital et le troisième des intrants intermédiaires.

2.3 Sources de données et méthodes de calcul

2.3.1 PRODUCTION

2.3.1.1 Production et intrants intermédiaires

Les tableaux entrées-sorties sont la principale source de données pour le calcul de la PMF en ce qui concerne la production et les intrants intermédiaires. La méthode de Statistique Canada fait appel à trois séries de TES : aux prix courants, aux « prix de Laspeyres » et aux « prix de Paasche ». Dans les TES aux prix de Laspeyres, les flux sont évalués aux prix de l'année précédente : le rapport d'un flux de l'année *t* aux prix courants sur le même flux aux prix de Laspeyres est égal à l'indice de prix de Paasche correspondant. Dans les TES aux prix de Paasche, les flux sont évalués aux prix de l'année suivante : le rapport d'un flux de l'année *t* aux prix de Paasche sur le même flux aux prix courants est égal à l'indice de prix de Laspeyres correspondant de l'année *t*+1. Un énoncé mathématique permettra de clarifier ce qui précède.

Soit

$z_t^C = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{it} q_{it}$ un flux agrégé quelconque du TES, aux prix courants; [126]

$z_t^L = \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{i,t-1} q_{it}$ le même flux aux prix de Laspeyres; [127]

$z_t^P = \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{i,t+1} q_{it}$ le même flux aux prix de Paasche. [128]

Soit aussi $LQ_{t/t\text{-}1}$ et $LP_{t/t\text{-}1}$ les indices de quantité et de prix de Laspeyres et $PQ_{t/t\text{-}1}$ et $PP_{t/t\text{-}1}$ les indices de quantité et de prix de Paasche. On a les relations suivantes :

$$LQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_t^L}{z_{t-1}^C} \qquad [129]$$

$$PQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^P} \qquad [131]$$

$$LP_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_{t-1}^P}{z_{t-1}^C} \qquad [130]$$

$$PP_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} = \frac{z_t^C}{z_t^L} \qquad [132]$$

À partir des trois séries de TES, on peut donc construire les indices de quantité et de prix de Fisher d'une période sur la précédente, au moyen des formules

$$FQ_{t/t-1} = \sqrt{LQ_{t/t-1} PQ_{t/t-1}} \text{ et } FP_{t/t-1} = \sqrt{LP_{t/t-1} PP_{t/t-1}} \quad [133]$$

Notons que

$$LP_{t/t-1} PQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_{t-1}^P}{z_{t-1}^C} \frac{z_t^C}{z_{t-1}^P} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \quad [134]$$

$$PP_{t/t-1} LQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} \frac{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_t^C}{z_t^L} \frac{z_t^L}{z_{t-1}^C} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \quad [135]$$

de sorte que

$$FP_{t/t-1} FQ_{t/t-1} = \sqrt{LP_{t/t-1} PP_{t/t-1}} \sqrt{LQ_{t/t-1} PQ_{t/t-1}} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \quad [136]$$

C'est ainsi que Statistique Canada construit les séries d'indices enchaînés de Fisher de volume de production et d'intrants intermédiaires des industries (Baldwin et autres 2007, p. 20-23).

Soulignons que les TES en prix constants diffusés par Statistique Canada sont des indices de quantité de Laspeyres (Statistique Canada, 2001, p. 20). Par conséquent, ou bien les TES aux prix de Paasche sont construits par la Division entrées-sorties spécifiquement pour les Comptes de productivité, ou bien ils sont estimés à partir des TES aux prix courants et aux prix de Laspeyres. En effet, à un niveau très détaillé des TES, il peut être acceptable de faire l'hypothèse que les prix sous-jacents à un flux donné évoluent à peu près proportionnellement[21]. Dans ces conditions,

$$z_t^C = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{it} q_{it} = \sum_i \pi_{t/t-1}\, p_{i,t-1} q_{it} = \pi_{t/t-1}\, \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t = \pi_{t/t-1}\, z_t^L \quad [137]$$

où $\pi_{t/t-1}$ est le taux d'inflation du flux z. On peut alors calculer z_{t-1}^P au moyen de

$$\frac{z_{t-1}^C z_t^C}{z_t^L} = \frac{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t-1} \sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i,t-1} q_{it}} = \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t)}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} \quad [138]$$

21 Ou, de façon mathématiquement équivalente mais moins réaliste, on peut faire l'hypothèse que le flux représente des transactions portant sur un seul bien homogène, qui se transige à un prix unique (auquel cas la sommation ne contient qu'un seul terme).

$$\frac{z_{t-1}^{C} z_{t}^{C}}{z_{t}^{L}} = \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\pi_{t/t-1} \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t})}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t}} = \pi_{t/t-1} \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t})}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t}} \quad [139]$$

$$\frac{z_{t-1}^{C} z_{t}^{C}}{z_{t}^{L}} = \pi_{t/t-1} \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1} = \mathbf{p}_{t} \cdot \mathbf{q}_{t-1} = z_{t-1}^{P} \quad [140]$$

Est-ce ainsi que procède l'équipe des Comptes de productivité? C'est ce que laisse entendre le passage suivant de Baldwin et autres (2007, p. 19) : « Nous estimons l'indice-chaîne de Fisher de la production et des intrants intermédiaires pour la base de données expérimentales de productivité à partir de deux jeux de tableaux de production et d'utilisation en prix courants et en prix de Laspeyres. Dans ce cadre modifié, nous prenons d'abord ces deux ensembles de tableaux, établissons des indices implicites de prix des sorties et des intrants, puis procédons par agrégation de Fisher pour l'estimation de l'indice-chaîne de Fisher. »

2.3.1.2 Valeur ajoutée

La valeur ajoutée nominale (aux prix courants) est égale à la différence entre la valeur de la production et la valeur des intrants intermédiaires. Soit $z_{Q,t}^{C}$ la valeur agrégée de la production d'une industrie aux prix courants, $z_{X,t}^{C}$ la valeur agrégée de ses intrants aux prix courants et v_{t}^{C} la valeur ajoutée (ou PIB nominal) :

$$v_{t}^{C} = z_{Q,t}^{C} - z_{X,t}^{C} \quad [141]$$

Les indices Laspeyres et Paasche du volume de la valeur ajoutée sont obtenus par « double déflation ». L'indice de Laspeyres est donné par

$$LQ_{V,t/t-1} = \frac{z_{Q,t}^{L} - z_{X,t}^{L}}{z_{Q,t-1}^{C} - z_{X,t-1}^{C}} = \frac{z_{Q,t}^{L} - z_{X,t}^{L}}{v_{t-1}^{C}} = \frac{LQ_{Q,t/t-1} z_{Q,t-1}^{C} - LQ_{X,t/t-1} z_{X,t-1}^{C}}{v_{t-1}^{C}} \quad [142]$$

et l'indice de Paasche par

$$PQ_{V,t/t-1} = \frac{z_{Q,t}^{C} - z_{X,t}^{C}}{z_{Q,t-1}^{P} - z_{X,t-1}^{P}} = \frac{v_{t}^{C}}{z_{Q,t-1}^{P} - z_{X,t-1}^{P}} = \frac{v_{t}^{C}}{\dfrac{z_{Q,t}^{C}}{PQ_{Q,t/t-1}} - \dfrac{z_{X,t}^{C}}{PQ_{X,t/t-1}}} \quad [143]$$

Finalement, l'indice de Fisher du volume de la valeur ajoutée est

$$FQ_{V,t/t-1} = \sqrt{LQ_{V,t/t-1} PQ_{V,t/t-1}} \quad [144]$$

2.3.1.3 Production sectorielle

La production sectorielle est égale à la différence entre production brute et les transactions intra-industrie. Le cadre comptable des TES de Statistique Canada distingue le tableau des entrées et celui des sorties. Le tableau des entrées montre la valeur des biens et services achetés par les industries, tandis que le tableau des sorties montre la valeur des biens et services vendus par les industries. Contrairement au tableau *input-output* carré de Leontief, avec correspondance biunivoque entre biens et industries, les TES rectangulaires biens-industries de Statistique Canada ne montrent pas explicitement les transactions intra-industrie.

La demande d'un produit *x* d'une industrie *i* comme intrant par cette même industrie est estimée suivant l'hypothèse de parts de marché fixes. Cette hypothèse comprend deux volets :

- la part des importations dans la demande intérieure du produit *x* est supposée la même pour tous les segments de la demande, y compris la demande intermédiaire du produit *x* par l'industrie *i*;
- la part de l'industrie *i* dans la fourniture du produit *x* est supposée la même pour tous les acheteurs, y compris pour l'industrie *i* elle-même.

Une fois estimées les transactions intra-industrie, les indices de Laspeyres et de Paasche du volume de la production sectorielle sont obtenus par « double déflation », comme les indices de volume de la valeur ajoutée. L'indice de Fisher de la production sectorielle est ensuite calculé à partir des indices de Laspeyres et de Paasche.

2.3.2 CAPITAL

Le traitement du capital dans la méthode d'estimation de la PMF de Statistique Canada est décrit dans Harchaoui et Tarkhani (2002), Baldwin et Gu (2007) et Baldwin et autres (2007; en particulier pp. 25-27 et 45-50). La méthode de mesure de l'intrant capital se situe dans la lignée des travaux qui remontent à Christensen et Jorgenson (1969).

La mesure de la PMF implique une comparaison entre les variations de la production et les variations de l'utilisation des intrants. La théorie microéconomique de la firme représente la relation entre la production et les intrants au moyen d'une fonction de production. Le capital fait évidemment partie des intrants. Mais c'est un intrant différent des autres, en particulier parce qu'il n'est pas consommé dans le processus de production. Le capital doit néanmoins être en place pendant un certain temps pour être utilisé, c'est-à-dire pour *servir* à la production. Pour être cohérente avec la théorie de la production, la mesure du capital comme intrant devrait donc être une mesure du *flux de services* que l'on tire des actifs qui constituent le capital. Cette conception de la mesure de l'intrant capital le rapproche d'ailleurs de l'intrant travail, que l'on mesure par le temps de travail fourni par les travailleurs : c'est en effet le temps de travail qui est consommé dans la production, et non les travailleurs eux-mêmes.

La mesure de l'intrant capital est donc la mesure des *services* du capital. À cet égard, Statistique Canada suit une méthode ascendante (Baldwin et autres 2007, p. 25 et 45) en trois étapes (Baldwin et autres 2007, p. 25 et 45). La première étape est d'estimer le stock de capital par catégorie d'actif et par industrie au moyen de la méthode de l'inventaire perpétuel (voir 2.3.2.1). Les données sur le stock de capital distinguent 30 catégories d'actifs : 15 types d'équipement, 13 types de bâtiments et ouvrages de génie, les terrains et les stocks d'inventaire[22]. La deuxième étape consiste à estimer les services du capital dans chaque industrie à partir des stocks de capital par catégorie d'actifs et par industrie. La clé du passage des stocks aux services de capital est le coût d'usage du capital (voir 2.3.2.2 et 2.3.2.3). La dernière étape est d'agréger les services du capital par industrie en groupes d'industries (secteurs) ou pour l'ensemble du secteur des entreprises.

2.3.2.1 Estimation du stock de capital par la méthode de l'inventaire perpétuel

Machines et matériel et bâtiments et ouvrages de génie

Sauf pour les terrains et les inventaires, le stock de capital est estimé selon la méthode de l'inventaire perpétuel. Selon cette méthode, le stock total de capital d'une catégorie donnée d'actifs dans une industrie donnée est la somme des stocks de capital de toutes les générations passées, mesurés en unités d'équivalence d'efficacité. Cela revient à mesurer le stock de capital de chaque génération par le volume de services qu'il peut fournir. On suppose que le volume des services fournis par le capital de chaque génération est proportionnel à l'investissement initial. Pour l'actif de catégorie *a* de l'industrie *i*, on a

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{\infty} d_{ia\tau} I_{ia,t-\tau} \qquad [145]$$

Le facteur de proportionnalité $d_{ia\tau}$ est un coefficient d'efficacité relative propre à chaque génération τ de capital de catégorie a. Le stock de capital est donc une somme pondérée des investissements passés. Hall (1968) a défini les conditions théoriques d'existence d'un stock de capital agrégé ainsi défini. Si l'on fait l'hypothèse que l'efficacité relative évolue dans le temps selon une décroissance géométrique, on a

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \left(1-\delta_{ia}\right)^{\tau} I_{ia,t-\tau} \qquad [146]$$

---

22 Baldwin et autres (2007, p. 25, 39 et 45-46); les chiffres donnés au bas de la p. 28 de Baldwin et Gu (2007) sont différents. Mais ce dernier document rend compte de travaux expérimentaux dont les méthodes sont propres à ce projet.

où δ_{ia} est le taux géométrique de déclin de l'efficacité du capital de catégorie *a* dans l'industrie *i*, ce qui correspond au concept économique de dépréciation. Les méthodes d'estimation des taux de dépréciation des diverses catégories d'actifs sont décrites en détail dans Statistique Canada (2007; voir ci-après 2.3.2.4).

Les données d'investissement en machines et matériel et en bâtiments et ouvrages de génie sont élaborées à partir de données sur l'investissement par actif de la Division de l'investissement et du stock de capital (DISC) de Statistique Canada. Mais pour s'assurer de la cohérence entre les données sur les stocks de capital et sur la production de biens de capital, les données d'investissement de la DISC sont ajustées selon la valeur totale de la demande finale d'investissement par industrie dans les TES annuels (Baldwin et autres 2007, p. 46; Baldwin et Harchaoui 2005, p. 17-20)[23].

<u>*Estimation du stock de capital initial*</u>

La méthode de l'inventaire perpétuel est utilisée pour estimer les stocks de capital de 28 catégories d'actifs (machines et matériel et bâtiments et ouvrages de génie). Mais en pratique, les données d'investissement nécessaires pour appliquer la formule [146] ne s'étendent pas jusqu'à un passé infiniment lointain. Pour Statistique Canada, les données remontent à 1961. Cela force à récrire [146]

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \left(1-\delta_{ia}\right)^{\tau} I_{ia,t-\tau} + \left(1-\delta_{ia}\right)^{t} K_{ia0} \qquad [147]$$

Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 129-130) décrivent la méthode d'estimation du stock de capital initial K_{ia0}. Ils définissent la fonction de production agrégée

$$\ln Q_t = \beta_0 + \beta_K K_t + \left(1-\beta_K\right)\ln L_t + \varepsilon_t \qquad [148]$$

Cette fonction de production est présentée comme étant à rendements constants, ce qui n'est manifestement pas le cas. On substitue [147] dans [148] :

$$\ln Q_t = \beta_0 + \beta_K \left[\sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} + (1-\delta)^{t} K_0 \right] + \left(1-\beta_K\right)\ln L_t + \varepsilon_t \qquad [149]$$

$$\ln Q_t - \ln L_t = \beta_0 + \beta_K \sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} + \beta_K (1-\delta)^{t} K_0 - \beta_K \ln L_t + \varepsilon_t \qquad [150]$$

---

[23] Dans la nomenclature détaillée des TES (niveau W), l'investissement par les industries du secteur des entreprises distingue 45 industries et, pour chacune, les investissements en machines et matériel et en construction. Cela fait 90 vecteurs de demande d'investissement par le secteur des entreprises. Chaque vecteur comporte 727 catégories de biens et services. Voir la nomenclature des catégories de demande finale préparée par Andréas Trau (Statistique Canada, document électronique *1401_D10_T9_V1-fra.pdf*).

$$\ln\left(\frac{Q_t}{L_t}\right) = \beta_0 + \beta_K \left[\sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} - \ln L_t\right] + \gamma D_t + \varepsilon_t \qquad [151]$$

où $D_t = (1–d)^t$ et $\gamma = \beta^K K_0$. L'équation [151] est ensuite estimée, par la méthode des moindres carrés généralisés, séparément pour les machines et matériel et les bâtiments et ouvrages de génie. Dans chaque cas, K_0 est estimé en divisant γ par β^K. Les stocks initiaux de machines et matériel et de bâtiments et ouvrages de génie sont ensuite répartis entre les industries et les catégories d'actifs au prorata des investissements de 1961.

Terrains (Baldwin et autres 2007, p. 25-26 et 48-49; Harchaoui et Tarkhani 2002, p. 135-137)

Statistique Canada applique désormais la méthode de l'U.S. Bureau of Labor Statistics (BLS) pour estimer le stock des terrains. La valeur nominale des terrains est tirée des bilans du secteur agricole et du secteur des entreprises non agricoles (Statistique Canada, tableaux CANSIM 002-0020 et 378-1114). La valeur réelle des terrains du secteur agricole est fixée à la superficie totale des terres agricoles cultivables; celle du secteur des entreprises non agricoles à la superficie totale du territoire urbain.

Au sein du secteur non agricole, la répartition de la valeur nominale des terrains entre les industries est obtenue en appliquant des ratios terrains-bâtiments au stock de bâtiments et ouvrages de génie; ces ratios sont calculés à partir de données sur les valeurs comptables des terrains et des bâtiments et ouvrages de génie dans les bilans des entreprises par secteur pour la période 1972-1987. La valeur nominale des terrains est ensuite convertie en valeur réelle au moyen des indices de prix implicites du capital en bâtiments et ouvrages de génie. Enfin, les stocks de terrains par industrie, tant en valeur nominale qu'en valeur réelle, sont ajustés de façon à ce que la somme soit égale au total pour le secteur des entreprises non agricoles.

La méthode antérieure d'estimation de la composante « terrains » de l'intrant capital consistait à supposer que les variations de cette composante étaient nulles pour l'ensemble du secteur des entreprises. La répartition entre les industries était basée sur la répartition des impôts fonciers. Selon Baldwin et autres (2007, p. 48) l'effet du changement de méthode a été faible.

Stocks d'inventaires (Baldwin et autres 2007, p. 49; Harchaoui et Tarkhani 2002, p. 133-135)

Les données d'inventaire des industries manufacturières proviennent de la Division des comptes d'industrie (DCI), qui produit des estimations à partir de l'Enquête annuelle sur les activités manufacturières. Celles des industries agricoles sont de la Division de l'agriculture. La Division des comptes des revenus et des dépenses fournit les données des autres industries.

La méthode de Statistique Canada pour la comptabilisation des variations de stocks d'inventaires en vue de l'estimation de la PMF est celle de Diewert et Smith (1994).

2.3.2.2 Coût d'usage du capital : concept

Une fois estimés les stocks de capital par catégorie d'actifs et par industrie, l'étape suivante consiste à agréger les actifs de chaque industrie pour obtenir une estimation des services du capital par industrie. S'il s'agissait simplement d'estimer le patrimoine par industrie (« wealth » en anglais), il suffirait d'utiliser les prix de marché des actifs et d'en additionner la valeur. Mais l'objectif est ici d'estimer le volume des *services* du capital. Pour chaque catégorie d'actif, le volume de services fourni par le stock de capital est considéré comme proportionnel au stock, en vertu même de la méthode de l'inventaire perpétuel appliquée pour construire les données (voir 2.3.2.1). Mais pour agréger plusieurs catégories d'actifs, il faut tenir compte des différences entre elles quant au volume des services rendus par unité de stock. Or, ce volume de services n'est pas proportionnel en général au prix de marché de l'actif. Par exemple, un actif qui a une longue vie utile peut avoir le même prix de marché qu'un autre dont la vie utile est plus courte, mais qui fournit un plus grand flux de services par période.

Selon la théorie économique de la production, la pondération qui convient pour agréger les actifs est le produit marginal. En équilibre concurrentiel, celui-ci est proportionnel au prix payé pour l'utilisation d'un intrant. Mais, à la différence de la main-d'œuvre, dont les services font l'objet d'une transaction de marché explicite (salaire), le capital est généralement rémunéré implicitement. Il faut donc construire une mesure du taux de rémunération du capital par catégorie d'actifs dans chaque industrie – ce que l'on appelle le « coût d'usage » du capital.

Lorsqu'on compare la croissance du stock agrégé de capital comme patrimoine (agrégation au moyen des prix de marché des actifs) et la croissance du volume des services du capital (agrégation au moyen des coûts d'usage), la différence mesure ce qu'il est convenu d'appeler « l'effet de composition » du capital (aussi appelé « l'effet du changement de qualité ») (Harchaoui et Tarkhani 2002, p. 138).

La formulation du coût d'usage du capital part de l'hypothèse que le prix d'acquisition q_{iat} d'un actif est égal à la valeur présente des revenus futurs $c_{ia,t+\tau}$ que le propriétaire recevra de l'utilisateur[24], compte tenu du taux de dépréciation δ_{ia} :

$$q_{iat} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(1-\delta_{ia}\right)^{\tau} \left[\prod_{s=1}^{\tau+1} \frac{1}{\left(1+r_{i,t+s}\right)} \right] c_{ia,t+\tau+1} \qquad [152]$$

24 Quand l'utilisateur est le propriétaire, comme c'est généralement le cas pour le capital, il s'agit d'un loyer implicite.

où $r_{i,t+s}$ est le taux d'actualisation applicable aux actifs de l'industrie i[25] pour la période t+s.

Cette formule traduit l'hypothèse qu'un actif acquis à la fin de la période t est déployé au début de la période t+1 (qui coïncide avec la fin de la période t) et rapporte un premier revenu à la fin de t+1; sa capacité productive diminue ensuite au taux géométrique constant de δ_{ia} par période. Cette structure temporelle est inspirée de Diewert (2004).

En développant cette formule pour $q_{ia,t-1}$, on trouve

$$q_{ia,t-1} = \frac{1}{1+r_{it}} c_{iat} + \left(\frac{1-\delta_{ia}}{1+r_{it}} \right) q_{iat} \qquad [153]$$

D'où la différence

$$q_{iat} - q_{ia,t-1} = -\frac{1}{1+r_{it}} c_{iat} + \left(1 - \frac{1-\delta_{ia}}{1+r_{it}} \right) q_{iat} \qquad [154]$$

On résout ensuite [154] pour trouver le loyer de l'actif, c'est-à-dire son coût d'usage c_{iat} en l'absence de fiscalité :

$$c_{iat} = r_{it} q_{ia,t-1} + \delta_{ia} q_{iat} - \left(q_{iat} - q_{ia,t-1} \right) \qquad [155]$$

Selon la structure temporelle sous-jacente à [152], c_{iat} est le coût encouru pour l'utilisation de l'actif a durant la période t. Le premier terme du membre de droite de [155] représente le coût d'option pour l'entreprise d'utiliser le capital. Cette formulation reflète l'hypothèse que le capital utilisé à la période t a été mis en place à la fin de la période précédente (qui coïncide avec le début de la période courante) au coût de $q_{ia,t-1}$, un montant qu'il faut financer durant la période t au taux r_{it}. Ou encore, le capital utilisé à la période t aurait pu être vendu au début de la période t (qui coïncide avec la fin de la période précédente) au prix de $q_{ia,t-1}$ et cette somme aurait pu investie ailleurs ou être placée au taux de r_{it}. Dans un cas comme dans l'autre, $r_{it}\ q_{ia,t-1}$ est un coût d'option. Le deuxième terme du membre de droite de [155] est la valeur perdue en dépréciation au cours de la période. Le dernier terme est le gain en capital (ou la perte, s'il est négatif) qui résulte de la variation du prix de marché de l'actif. La présence de ce dernier terme met en évidence le fait que le coût d'usage du capital [155] est un coût nominal (OCDE 2001b).

Soit

---

25 On suppose donc que le taux d'actualisation puisse être différent d'une industrie à l'autre. Voir Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 116 et 120-121) et Baldwin et Gu (2007, p. 17-21).

$$\pi_{iat} = \frac{q_{iat} - q_{ia,t-1}}{q_{ia,t-1}} \qquad [156]$$

ce qui implique

$$(1 + \pi_{iat})q_{ia,t-1} = q_{iat} \qquad [157]$$

On récrit [155]

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}(1 + \pi_{iat}) - \pi_{iat}\right] \qquad [158]$$

Avec un impôt sur le revenu des sociétés, la rémunération nette du détenteur du capital subit une diminution, une fraction du revenu étant prélevée par le fisc :

$$(1 - u_{it})c_{iat} = q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}(1 + \pi_{iat}) - \pi_{iat}\right] \qquad [159]$$

où u_{it} est le taux de l'impôt sur le revenu des entreprises (pour le moment, on ignore la distinction entre les sociétés et les entreprises non constituées en sociétés). En présence d'un impôt sur le revenu des entreprises, *ceteris paribus*, l'utilisateur devra payer au propriétaire du capital une rémunération supérieure pour compenser la ponction fiscale :

$$c_{iat} = \frac{q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}(1 + \pi_{iat}) - \pi_{iat}\right]}{(1 - u_{it})} > q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}(1 + \pi_{iat}) - \pi_{iat}\right] \qquad [160]$$

D'autres aspects de la fiscalité doivent être pris en compte. D'abord, la dépréciation donne droit à des déductions fiscales. Il y a aussi des crédits d'impôt à l'investissement. Compte tenu de la valeur présente des déductions fiscales pour amortissement et du crédit d'impôt pour investissement, le coût net d'acquisition d'une unité de capital est donné par

$$q_{ia,t-1} - u_{it}z_{iat}q_{ia,t-1} - v_{iat}q_{ia,t-1} = (1 - u_{it}z_{iat} - v_{iat})q_{ia,t-1} \qquad [161]$$

où

- $z_{iat}\, q_{ia,t-1}$ est la valeur présente des déductions fiscales pour amortissement auxquelles donne droit une unité de capital achetée à la fin de la période précédente au prix de $q_{ia,t-1}$ et $u_{it}\, z_{iat}\, q_{ia,t-1}$ est la valeur présente des économies d'impôt résultant de ces déductions;
- v_{iat} est le crédit d'impôt accordé par dollar d'investissement et $v_{iat}\, q_{ia,t-1}$ est le montant du crédit d'impôt.

À partir de [161], on peut compléter [159] et écrire

$$(1-u_{it})c_{iat} = q_{ia,t-1}(1-u_{it}z_{iat}-v_{iat})[r_{it}+\delta_{ia}(1+\pi_{iat})-\pi_{iat}] \qquad [162]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)[r_{it}+\delta_{ia}(1+\pi_{iat})-\pi_{iat}] \qquad [163]$$

Enfin, s'il s'agit de bâtiment ou de terrain, il faut ajouter l'impôt foncier, proportionnel à la valeur nominale des biens immobiliers :

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)[r_{it}+\delta_{ia}(1+\pi_{iat})-\pi_{iat}]+\phi_{iat}q_{ia,t-1} \qquad [164]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left\{\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)[r_{it}+\delta_{ia}(1+\pi_{iat})-\pi_{iat}]+\phi_{iat}\right\} \qquad [165]$$

où ϕ_{iat} est le taux d'imposition foncière. Le fait que ce taux multiplie $q_{ia,t-1}$ suppose que la valeur foncière qui sert à calculer les impôts est la « juste valeur marchande » à la fin de l'année précédente. Le cas échéant, il faudrait tenir compte de la déductibilité des impôts fonciers par rapport à l'impôt sur le revenu des sociétés; en pratique, cela est probablement fait implicitement dans le calibrage du taux d'impôt sur le revenu (voir Harchaoui et Tarkhani 2002, annexe 4.A).

On a donc, en explicitant [165],

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left\{\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)\left[r_{it}+\delta_{ia}\frac{q_{iat}}{q_{ia,t-1}}-\frac{q_{iat}-q_{ia,t-1}}{q_{ia,t-1}}\right]+\phi_{iat}\right\} \qquad [166]$$

Cette équation est différente de l'équation (4) de Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 115) en ce que le taux de dépréciation δ_{ia} s'applique ici à $q_{ia,t}$ et non à $q_{ia,t-1}$ comme dans Harchaoui et Tarkhani. Cette différence découle d'une erreur dans l'équation (3) de ces auteurs (voir en comparaison l'équation [155] ci-haut). Elle diffère aussi de l'équation (13) de Baldwin et Gu (2007, p. 16) pour ce qui est du dernier terme.

En effet, Baldwin et Gu (2007, p. 16) définissent ϕ_t (sans indice *a*) dans [166] comme « le taux effectif d'imposition foncière[26] ». S'agissant d'un taux d'imposition, il devrait multiplier le prix de l'actif. D'autre part, l'imposition foncière ne s'applique qu'aux biens fonciers (contrairement à l'impôt sur le

---

[26] Ils ajoutent, entre parenthèses « valeur nominale de l'impôt calculée sur le stock nominal de terrains et de bâtiments ». C'est là une mauvaise traduction de « nominal valued taxes assessed on the nominal stocks of land and structures ». En français, il faudrait dire : [taux effectif des] impôts en valeur nominale définis par rapport aux stocks de terrains et de bâtiments en valeur nominale.

revenu, par exemple, qui s'applique à l'ensemble des revenus du capital). Il est donc inexact de laisser supposer qu'il est le même pour tous et le ϕ devrait porter un indice relatif à la catégorie d'actif (a dans notre notation; k dans celle de Baldwin et Gu).

Dans le cas particulier des inventaires, il n'y a ni dépréciation, ni déduction fiscale pour amortissement, ni crédit d'impôt pour investissement et [166] se réduit donc à [160].

On peut simplifier l'écriture de [166] à

$$c_{iat} = T_{iat}\left[r_{it} q_{ia,t-1} + \delta_{ia} q_{iat} - \left(q_{iat} - q_{ia,t-1}\right)\right] + \phi_{iat} q_{ia,t-1} \qquad [167]$$

où

$$T_{iat} = \frac{1 - u_{it} z_{iat} - v_{iat}}{1 - u_{it}} \qquad [168]$$

Le taux effectif d'imposition, abstraction faite des impôts fonciers, est donc donné par

$$TEI_{iat} = T_{iat} - 1 = \frac{1 - u_{it} z_{iat} - v_{iat}}{1 - u_{it}} - 1 = \frac{u_{it}\left(1 - z_{iat}\right) - v_{iat}}{1 - u_{it}} \qquad [169]$$

En effet, sans impôt, le coût du capital est égal au membre de droite de [155] $r_{it} q_{ia,t-1} + \delta_{ia} q_{iat} - \left(q_{iat} - q_{ia,t-1}\right)$. Avec l'impôt (mais sans impôt foncier), il est égal au premier terme du membre de droite de [167]. L'impôt effectif est donc égal à la différence et son taux est donné par [169].[27]

En résumé, le calcul du coût d'usage du capital selon l'équation [167] exige donc de connaître :

- les paramètres fiscaux qui déterminent T_{iat} et ϕ_{iat};
- les prix des actifs q_{iat};
- les taux de dépréciation δ_{ia};
- le taux de rendement r_{it}.

Ces différents éléments sont passés en revue dans la section 2.3.2.3.

---

[27] Baldwin et Gu (2007) et Harchaoui et Tarkhani (2002) interprètent à tort T_{iat} comme le taux effectif d'imposition des revenus du capital de type a dans l'industrie i.

Aspects relatifs à la structure temporelle

On trouve un développement semblable à [168] dans McKenzie et autres (1998)[28], où l'analyse du coût d'usage du capital vise à mettre en évidence le taux effectif marginal d'imposition (TEMI), qui mesure le « coin fiscal » (*tax wedge*) entre le taux de rendement payé aux détenteurs de capital et la valeur du produit marginal. La formulation de McKenzie et autres (1998) est en temps continu, ce qui évite plusieurs questions délicates qui surgissent lorsqu'on veut passer à une formulation en temps discret. Par exemple, pour définir le coût d'option $r_{it}\ q_{ia,t-1}$ (premier terme du membre de droite de [155]), il faut expliciter la structure temporelle du modèle sous-jacent. En l'occurrence, on suppose que le capital utilisé à la période *t* doit avoir été mis en place à la fin de période précédente, qui coïncide avec le début de la période courante; mais d'autres hypothèses sont possibles.

Par ailleurs, pour être cohérent avec la structure temporelle sous-jacente à [152], il faut supposer dans [159] que l'impôt est payé à la fin de la période *t*. Il en découle que, pour pouvoir appliquer les déductions aux fins d'amortissement comme on le fait dans [161], il faut supposer que $u_{it}\, z_{iat}\, q_{ia,t-1}$ est la valeur présente au *début* de la période *t* (qui coïncide avec la fin de *t*–1); il faut aussi supposer que v_{iat} est la *valeur présente* du crédit d'impôt *au début* de la période *t*. Pour ces raisons, il semble qu'il aurait été plus cohérent dans [161] d'inscrire $u_{it}\ z_{ia,t-1}\ q_{ia,t-1}$ et $v_{ia,t-1}\ q_{ia,t-1}$, avec des indices temporels *t*–1 à *z* et *v*[29]. Notons également que l'expression $u_{it}\, z_{iat}\, q_{ia,t-1}$ suppose aussi que l'entrepreneur anticipe un taux d'imposition u_{it} inchangé à l'avenir.

Se pose plus largement la question des anticipations. Car il ne faut pas perdre de vue que l'objectif dans l'estimation du coût d'usage du capital est d'obtenir des indicateurs du produit marginal du capital en vue d'agréger les actifs et d'estimer les services du capital. Or, l'existence de délais d'installation du capital implique que les décisions de l'entreprise sont prises *ex ante*, de sorte que les observations *ex post* ne représentent pas nécessairement un équilibre où les facteurs sont rémunérés à la valeur de leur produit marginal. Cela s'applique en particulier au gain en capital anticipé. C'est pourquoi Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 115-116) et Baldwin et Gu (2007, p. 16) substituent le prix anticipé q^*_{iat} au prix observé q_{iat}. Représenter le gain en capital comme dans [166] revient à faire l'hypothèse d'anticipations parfaites. L'autre extrême est de considérer les gains en capital comme « transitoires » et de les exclure de l'équation ou, ce qui revient au même, faire l'hypothèse d'anticipations myopes ($q^*_{iat} = q_{ia,t-1}$). Baldwin

28 Voir aussi Decaluwé et autres (2003).

29 Selon Harchaoui et Tarkhani (2002, annexe 4.A), la méthode de calcul des paramètres *z* et *v* est tirée notamment de Jung (1989) et McKenzie et autres (1998). Il faudra vérifier quelle est la structure temporelle sous-jacente à ces formules de calcul.

et Gu préfèrent une solution intermédiaire : « [...] bien que le terme de gains en capital soit justifié du point de vue théorique, il est probablement préférable de n'inclure dans l'analyse qu'un terme lissé, parce que les séries non lissées sont tellement instables qu'il est difficile de croire que les entreprises essaieront d'en tenir compte. Ou bien, fait plus important, nous pourrions soutenir que la productivité marginale du capital ne peut pas être ajustée aux fluctuations rapides d'un prix de location du capital qu'engendre la mesure habituelle des gains en capital. » (2007, p. 54). On trouve aussi une discussion de cette question dans Diewert (2004, p. 12-13), qui opte pour une solution semblable.

2.3.2.3 Coût d'usage du capital : estimation

Taux de rendement endogène ou exogène

Il y a deux approches à l'estimation du taux de rendement (ou taux d'actualisation) de l'équation [167] : on peut utiliser un taux exogène tiré de données sur les marchés financiers ou on peut calculer un taux de rendement « endogène », spécifique à chaque industrie. Dans le premier cas, on suppose que l'allocation du capital est un équilibre où ne subsiste aucune occasion profitable d'arbitrage, comme ce serait le cas avec mobilité parfaite du capital[30]. Mais « Baldwin et Gu (2007) constatent une variation importante du taux endogène de rendement du capital selon l'industrie et une corrélation positive de ce taux avec la croissance du stock de capital dans les diverses industries. Cela donne à penser que la différence de taux de rendement entre les industries est bien réelle et que le capital tend à se déplacer vers celles où le taux de rendement est relativement élevé. » (Baldwin et autres 2007, p. 26). Cela milite en faveur de l'utilisation d'un taux endogène. Le Canada, l'Australie et les États-Unis utilisent présentement un taux de rendement endogène. La procédure de calcul de Statistique Canada est exposée dans Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 116 et 120-121) et dans Baldwin et Gu (2007, p. 17-21).

On estime le taux de rendement endogène en combinant le stock de capital par industrie avec les données de la rémunération du capital par industrie calculée à partir des TES. La rémunération du capital est obtenue en additionnant : (1) les autres excédents d'exploitation (qui correspondent au revenu brut du capital des sociétés), (2) les taxes indirectes nettes sur la production et (3) la rémunération du capital des entreprises non constituées en société. Cette dernière est obtenue en soustrayant du revenu mixte le revenu imputé du travail des travailleurs autonomes et des travailleurs familiaux non rémunérés (Harchaoui et autres 2004, p. 20-21)[31].

---

[30] Cela n'empêche pas en principe que le taux de rendement soit modulé en fonction du risque associé à chaque industrie.

[31] Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 140) présentent sous forme de tableau les diverses options de modélisation des taux de rendement et des gains en capital. Le tableau contient cependant des erreurs de traduction : on y parle de « taux de rendement *minimal* interne », alors qu'il s'agit de taux de rendement *nominal* interne!

Soit R_{it} la rémunération du capital de l'industrie i calculée à partir des TES. R_{it} est théoriquement le résultat de

$$R_{it} = \sum_a c_{iat} K_{iat} \qquad [170]$$

où K_{iat} est le stock du capital de type a dans l'industrie i et c_{iat} son coût d'usage. On substitue [167] dans [170] :

$$R_{it} = \sum_a c_{iat} K_{iat} = \sum_a \left\{ T_{iat} \left[r_{it} q_{ia,t-1} + \delta_{ia} q_{iat} - \pi_{iat} q_{ia,t-1} \right] + \phi_{iat} q_{ia,t-1} \right\} K_{iat} \qquad [171]$$

$$R_{it} = \sum_a T_{iat} r_{it} q_{ia,t-1} K_{iat} + \sum_a T_{iat} \delta_{ia} q_{iat} K_{iat} - \sum_a T_{iat} \pi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat} + \sum_a \phi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat} \qquad [172]$$

$$\sum_a T_{iat} r_{it} q_{ia,t-1} K_{iat} = R_{it} - \sum_a T_{iat} \delta_{ia} q_{iat} K_{iat} + \sum_a T_{iat} \pi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat} - \sum_a \phi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat} \qquad [173]$$

$$r_{it} = \frac{R_{it} - \sum_a T_{iat} \delta_{ia} q_{iat} K_{iat} + \sum_a T_{iat} \pi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat} - \sum_a \phi_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat}}{\sum_a T_{iat} q_{ia,t-1} K_{iat}} \qquad [174][32]$$

Étant donné la rémunération du capital R_{it} et les stocks K_{iat}, et moyennant les paramètres fiscaux, les prix des actifs et les taux de dépréciation, on calcule les taux de rendement au moyen de [174].

La méthode qui vient d'être décrite se heurte à des difficultés lorsque la rémunération du capital R_{it} de certaines industries est négative, comme cela se produit parfois dans les TES. Il faut d'abord rappeler que la rémunération du capital est calculée comme un résidu. L'expérience et la théorie économique enseignent que, soit ce résidu négatif est le résultat d'un artifice de calcul, soit il représente une situation de déséquilibre transitoire. Car dans l'hypothèse où les facteurs sont rémunérés à leur produit marginal, une rémunération négative du capital serait le signe d'une productivité marginale négative, une absurdité. En fait, étant donné que le capital n'est pas parfaitement mobile et que son déploiement peut être irréversible, le coût du capital pertinent selon la théorie microéconomique de la production est le coût anticipé à long terme. La solution appliquée par Statistique Canada est la suivante : « Par conséquent, pour mesurer les services agrégés du capital d'après le stock de capital selon l'actif et les prix des services, nous devons apporter des corrections pour tenir compte des actifs dont le coût d'utilisation devient négatif à court terme. Nous fixons donc les coûts d'utilisation négatifs à la valeur des coûts moyens d'utilisation sur l'ensemble des industries pour ces actifs, puis nous les corrigeons pour tenir

32 Le fait que le dernier terme du numérateur de cette équation soit identique à celui de l'équation (18) de Baldwin et Gu (2007) confirme qu'il y a une coquille dans leur équation (13).

compte des différences de coût d'utilisation du capital entre les industries. » (Baldwin et autres 2007, p. 27).

Gains en capital (Baldwin et Gu 2007, p. 22-23; Harchaoui et Tarkhani 2002, p. 123)

Les gains en capital ont déjà été abordés sous l'angle de la structure temporelle du modèle sous-jacent au coût d'usage du capital et des hypothèses relatives aux anticipations. Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 123) ont mené des expériences en s'appuyant sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ($q^*_{iat} = q_{iat}$) et sur une variante de cette hypothèse qui consiste à estimer le prix anticipé au moyen d'une moyenne mobile des prix passés.

Harchaoui et Tarkhani (2002) présentent sous forme de tableau (tableau 4.5, p. 140) les diverses options de modélisation des gains en capital et des taux de rendement. Pour choisir entre les approches, ils estiment d'abord l'effet de composition du capital[33] dans 16 industries, sur la période 1961-2000 selon chacune des 5 approches, puis, ils appliquent à l'ensemble de ces estimations un modèle à effets fixes comportant des variables qualitatives binaires relatives à l'approche utilisée, à l'année, ainsi que des variables d'interaction. Il en ressort qu'il existe des différences statistiquement faiblement significatives (10 %) entre certaines paires de méthodes. Compte tenu des hypothèses plutôt restrictives sous-jacentes à l'approche des taux de rendement externes, les auteurs concluent à une préférence pour une approche avec un taux de rendement interne et des gains en capital estimés soit suivant l'hypothèse d'anticipations parfaites, soit au moyen d'une moyenne mobile. L'approche retenue par Statistique Canada pour son programme de productivité est celle d'un taux de rendement interne et d'anticipations parfaites.

Taux de rendement et taux d'inflation réels et nominaux

Dans [166], le taux de rendement est un taux nominal. Certains suggèrent cependant d'utiliser un taux réel. Théoriquement, cela est approximativement équivalent. Soit en effet ρ_{it} le taux d'intérêt réel et i_t le taux d'inflation générale. Le taux d'intérêt nominal est déterminé par

$$r_{it} = (1+\rho_{it})(1+i_t) - 1 = \rho_{it} + i_t + \rho_{it} i_t \approx \rho_{it} + i_t \qquad [175]$$

De même, π_{iat} est le taux de gain en capital nominal. On définit le taux de gain en capital réel :

$$\pi^*_{iat} = \frac{1+\pi_{iat}}{1+i_t} - 1 = \frac{\pi_{iat} - i_t}{1+i_t} \qquad [176]$$

33 Voir 2.3.2.2 ci-haut et Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 138).

ou

$$\pi_{iat} = \left(1+\pi^*_{iat}\right)\left(1+i_t\right)-1 = \pi^*_{iat} + i_t + \pi^*_{iat} i_t \approx \pi^*_{iat} + i_t \quad [177]$$

D'où

$$q_{iat} = \left(1+\pi^*_{iat}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} \approx \left(1+\pi^*_{iat}+i_t\right)q_{ia,t-1} \quad [178]$$

On multiplie les deux membres de [154] par ($1+r_{it}$) et on résout pour c_{iat} :

$$c_{iat} = \left(r_{it}+\delta_{ia}\right)q_{iat} - \left(1+r_{it}\right)\left(q_{iat}-q_{ia,t-1}\right) \quad [179]$$

ou encore

$$c_{iat} = \left(1+r_{it}\right)q_{iat} - \left(1-\delta_{ia}\right)q_{iat} - \left(1+r_{it}\right)\left(q_{iat}-q_{ia,t-1}\right) \quad [180]$$

On substitue [175] et [177] et, après développement, on obtient :

$$c_{iat} = \left(1+\rho_{it}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} - \left(1-\delta_{ia}\right)\left(1+\pi^*_{iat}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} \quad [181]$$

Dans l'hypothèse où $\pi^*_{iat} = 0$ (le taux d'inflation spécifique à l'actif est égal au taux général, c'est-à-dire que le prix relatif de l'actif demeure constant), on a $q_{iat} = \left(1+i_t\right)q_{ia,t-1}$ et cette équation se simplifie à

$$c_{iat} = \left(\rho_{it}+\delta_{ia}\right)q_{iat} \quad [182]$$

Dans le cas contraire, on peut utiliser les approximations [175] et [178] et on obtient

$$c_{iat} \approx \left(1+\rho_{it}+i_t\right)q_{ia,t-1} - \left(1-\delta_{ia}\right)\left(1+\pi^*_{iat}+i_t\right)q_{ia,t-1} \quad [183]$$

$$c_{iat} \approx \left(\rho_{it}-\pi^*_{iat}\right)q_{ia,t-1} + \delta_{ia}q_{iat} \quad [184]$$

Si l'on récrit [158] sous la forme

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(r_{it}-\pi_{iat}\right) + \delta_{ia}q_{iat} \quad [185]$$

On voit que les deux équations sont semblables, sauf pour le remplacement des taux nominaux par des taux réels.

Les taux réels étant jugés moins volatils que les taux nominaux, plusieurs auteurs préfèrent formuler le coût d'usage du capital en termes des taux réels d'intérêt et d'appréciation des actifs (Baldwin et Gu 2007, p. 16; Diewert 2004, p. 11-13). La méthode de Statistique Canada s'en tient néanmoins aux taux nominaux.

Paramètres fiscaux

Les sources de données et méthodes de calcul des paramètres fiscaux sont détaillées dans Harchaoui et Tarkhani (2002, annexe 4.A). Ceux-ci décrivent cependant des procédures définies selon la CTI, et non selon le SCIAN. Il faudrait communiquer avec Statistique Canada pour savoir quelles sont les pratiques courantes à cet égard.

Cela dit, Baldwin et Gu (2007) ont fait l'exercice d'estimer les services du capital avec, et sans les paramètres fiscaux. Pour l'ensemble du secteur des entreprises, ils concluent : « Nous constatons que ne pas tenir compte de l'impôt des sociétés introduit un biais par excès dans l'estimation de l'effet de la composition du capital dans le cas de la méthode basée sur le taux endogène [...] » (p. 42); et « La méthode d'estimation du coût d'usage du capital qui ne tient pas compte des paramètres fiscaux produit, dans l'estimation de la croissance estimée de la productivité multifactorielle par les méthodes basées sur un taux de rendement endogène, un biais par défaut qui est le résultat du biais par excès dans l'estimation de l'effet de la composition du capital obtenue par ces méthodes. » (p. 44).

2.3.2.4 Taux de dépréciation et forme de la fonction de dépréciation

Les taux de dépréciation interviennent, tant dans l'estimation du capital par la méthode de l'inventaire perpétuel (2.3.2.1) que dans le calcul du coût d'usage en vue de l'estimation des services du capital. Statistique Canada (2007) rend compte des travaux menés pour raffiner l'estimation des taux de dépréciation qui avait été réalisée par Gellatly et autres (2002).

La première partie de Statistique Canada (2007) présente un exposé mathématique sommaire des relations théoriques entre le profil d'efficacité d'un actif (la forme de l'évolution de sa capacité productive au cours de sa vie utile), l'évolution de sa valeur (sans, et avec actualisation du produit futur), le taux de dépréciation instantané (en temps continu), le taux de dépréciation moyen sur la vie utile de l'actif et le taux de dépréciation dégressif correspondant (TDD; « Declining-balance ratio » ou DBR en anglais), qui fait le lien entre les méthodes comptables et la théorie économique[34]. Ces relations sont examinées, d'abord dans un contexte de certitude quant à la durée de vie utile de l'actif, puis dans un contexte d'incertitude. Dans un contexte d'incertitude quant à la durée de vie, la courbe d'évolution de la valeur de l'actif prend généralement une forme convexe à l'origine (comme il résulte, par exemple, d'une fonction de dépréciation exponentielle, qui est la transposition en temps continu de la forme géométrique).

Les données utilisées pour estimer les taux de dépréciation proviennent de l'Enquête sur les dépenses en immobilisations et en réparations réalisée annuellement par la Division de l'investissement et du stock de capital de Statistique Canada. Cette enquête menée auprès d'un échantillon d'établissements recueille de l'information sur la vente et sur la mise hors service d'actifs fixes. Les données portent sur la catégorie d'actifs, leur valeur comptable brute (prix d'achat original, plus coût des améliorations), le prix de vente et l'âge de l'actif. Toutes les valeurs monétaires sont exprimées en prix constants au moyen de dégonfleurs. La variable dépendante des estimations économétriques est le « taux de survie » de la valeur originale d'un actif, défini comme le rapport du prix de vente sur la valeur comptable brute.

Les estimations économétriques de la courbe d'évolution de la valeur réelle d'un actif visent à extraire des résultats un taux moyen de dépréciation sur la durée de vie de l'actif, plutôt qu'à déterminer le profil d'évolution du taux de dépréciation (en général, les diverses formes du profil d'efficacité n'engendrent pas un taux de dépréciation constant, à l'exception du profil exponentiel ou de sa version en temps discret, le profil géométrique). Les taux de dépréciation estimés servent ensuite au calcul du stock de capital selon la méthode de l'inventaire perpétuel et ils entrent dans le calcul du coût d'usage du capital.

Statistique Canada applique trois méthodes d'estimation, dont elle compare les résultats. Les méthodes diffèrent quant à la forme fonctionnelle de la fonction de survie et quant au traitement des actifs mis hors service (à un prix nul). La MÉTHODE 1 est celle de Gellatly et autres (2002) : elle suppose une fonction de survie exponentielle et traite de la même manière les actifs vendus et ceux qui sont mis hors service à prix nul. La MÉTHODE 2 est en deux étapes : à la première étape, on estime la distribution des mises au rancart; ensuite, on corrige les prix des actifs vendus pour en tenir compte. Cette méthode suppose une fonction de distribution de Weibull pour les mises au rancart et une autre distribution de Weibull pour la courbe de survie. La MÉTHODE 3 consiste à estimer simultanément la fonction de mise au rancart et la courbe de survie. La première est une distribution de Weibull et la courbe de survie a deux variantes : l'une est dérivée du modèle de mort subite (« one-hoss-shay »)[35] et l'autre d'une fonction d'efficacité concave à l'origine.

Statistique Canada (2007) rapporte le résultat de simulations Monte-Carlo menées pour vérifier la robustesse des trois méthodes d'estimation par rapport aux erreurs de spécification et, surtout, par rapport aux problèmes d'échantillonnage (échantillon non aléatoire) qui sont susceptibles d'entacher les données. *Grosso modo*, les auteurs concluent que la MÉTHODE 2 et la MÉTHODE 3 sont préférables à la

---

[34] Le taux de dépréciation et le TDD sont liés par la relation δ = TDD / T, où T est la durée de vie utile de l'actif.

[35] Ce modèle de l'évolution de l'efficacité d'un actif dans le temps correspond à l'évolution d'une ampoule électrique, qui conserve le même niveau d'efficacité jusqu'à ce qu'elle se consume. L'expression « one-hoss shay » est une déformation phonétique de « one-horse shay », qui désigne une voiture à deux roues pour deux passagers, tirée par un seul cheval; c'est une adaptation américaine de ce que l'on appelait « chaise » en France. Employée pour désigner un profil d'efficacité, l'expression fait référence à un poème de Oliver Wendell Holmes. Dans ce poème humoristique, le héros se construit méticuleusement une voiture à cheval qui ne tombera jamais en panne, chaque pièce étant tout aussi résistante que les autres.

MÉTHODE 1. De plus, une fois les données pondérées pour tenir compte de la nature non aléatoire de l'échantillon, les différences entre la MÉTHODE 2 et la MÉTHODE 3 ne sont pas statistiquement significatives. Aux fins du programme de productivité, Statistique Canada retient donc comme taux de dépréciation la moyenne des estimations des deux méthodes.

En plus des données utilisées dans les estimations, l'Enquête sur les dépenses en immobilisations et en réparations contient de l'information sur la durée de vie utile prévue au moment où les immobilisations sont déclarées pour la première fois. Une comparaison entre les durées de vie utile estimées économétriquement *ex post* et les durées prévues *ex ante* révèle que les deux sont très semblables. Après avoir comparé les avantages et inconvénients des estimations *ex ante* et *ex post* des durées de vie utile, Statistique Canada a décidé d'utiliser les estimations économétriques des taux de dépréciation et les estimations *ex ante* des durées de vie utile.

Plus précisément, Statistique Canada (2007, p. 65-66) résume ses procédures de la façon suivante :

1. « Pour les actifs pour lesquels nous pouvons utiliser des prix d'actifs usagés pour calculer des estimations *ex post* de la dépréciation, nous calculons la moyenne des taux de dépréciation obtenus par la méthode en deux étapes (MÉTHODE 2) et par la méthode d'estimation simultanée (MÉTHODE 3).
2. Pour ces estimations, nous calculons un TDD implicite d'après l'équation 4 en utilisant le taux de dépréciation *ex post* et la durée de vie *ex ante*.[36]
3. Pour les actifs des catégories des machines et du matériel et des bâtiments pour lesquels l'hétérogénéité ou la disponibilité des données nous empêchent d'estimer un taux de dépréciation *ex post* pertinent, nous appliquons un TDD imputé à la durée de vie utile *ex ante*. Le TDD imputé pour un actif donné est calculé d'après le TDD moyen correspondant, au niveau des 22 groupes d'actifs s'il est disponible et sinon, au niveau de la catégorie générale de l'actif.
4. Pour les actifs de la catégorie des travaux de génie, nous disposons de peu d'estimation *ex post* pour nous orienter. Par conséquent, nous utilisons les estimations *ex ante* de la durée de vie. Mais le TDD que nous utilisons est calculé en combinant les estimations *ex post* disponibles pour tous les actifs de la catégorie des bâtiments et des travaux de génie.

Et en effet, la voiture dure cent ans sans le moindre bris, puis elle se désintègre instantanément. L'histoire est racontée dans OCDE (2001b, p. 72-73).

36 Mon interprétation de ce passage est que le calcul du TDD sert à l'estimation des taux de dépréciation des actifs pour lesquels l'estimation économétrique n'est pas possible, tel que décrit à la suite.

5. Pour les logiciels, nous utilisons la durée de vie utile *ex ante* avec un TDD de 1,65.
6. Par souci de simplification, nous calculons la moyenne des TDD sur l'ensemble des actifs de la catégorie des machines et du matériel, l'ensemble des bâtiments, et l'ensemble des travaux de génie, ce qui nous donne des estimations de 2,3, 2,1 et 2,3 respectivement, que nous utilisons avec les durées de vie prévues *ex ante*47. Le TDD moyen montre que le taux de dépréciation est légèrement supérieur au taux de dépréciation dégressive de 2, et que les machines et le matériel ont tendance à perdre plus rapidement de leur valeur que les bâtiments et les travaux de génie. »

2.3.2.5 Agrégation

Une fois déterminés les stocks de capital par catégorie d'actifs et par industrie K_{iat} et les coûts d'usage correspondants c_{iat}, on procède à l'agrégation pour obtenir le volume des services du capital par industrie. Selon l'annexe 4.B de Harchaoui et Tarkhani (2002, p. 163 et suiv.), cette agrégation se fait en deux étapes. D'abord, on regroupe les actifs fixes renouvelables en trois ensembles, à des fins d'analyse : (a) le capital relatif aux technologies de l'information, (b) les autres machines et matériel et (c) tout le reste, à savoir les bâtiments et ouvrages de génie, les terrains et les stocks d'inventaire. On agrège ensuite les trois ensembles d'actifs en un seul indice des services totaux du capital par industrie. Toutefois, dans Baldwin et autres (2007), le regroupement des actifs en trois ensembles n'est pas mentionné. D'ailleurs, la nomenclature des actifs est différente dans Baldwin et autres (2007; tableau 9, p. 46) et dans Harchaoui et Tarkhani (2002, tableau 4.4, p. 133), ce qui reflète sans doute le passage de la Classification type des industries (CTI) au Système de classification industrielle de l'Amérique du Nord (SCIAN).

En supposant que l'indice des services du capital par industrie soit calculé en une seule étape, on aurait :

- l'indice de Laspeyres du volume des services du capital dans l'industrie *i* :

$$LQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ia,t-1} K_{iat}}{\sum_a c_{ia,t-1} K_{ia,t-1}} = \frac{\sum_a c_{ia,t-1} K_{iat}}{R_{i,t-1}} \qquad [186]$$

- l'indice de Paasche du volume des services du capital dans l'industrie *i* :

$$PQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{iat} K_{iat}}{\sum_a c_{iat} K_{ia,t-1}} = \frac{R_{it}}{\sum_a c_{iat} K_{ia,t-1}} \qquad [187]$$

- l'indice de Fisher du volume des services du capital dans l'industrie *i* :

$$FQ_{it}^{K} = \sqrt{LQ_{it}^{K} PQ_{it}^{K}} \qquad [188]$$

Les indices de prix correspondants seraient donnés par

- l'indice de Laspeyres du prix des services du capital dans l'industrie *i* :

$$LP_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{iat} K_{ia,t-1}}{\sum_a c_{ia,t-1} K_{ia,t-1}} = \frac{\sum_a c_{iat} K_{ia,t-1}}{R_{i,t-1}} \qquad [189]$$

- l'indice de Paasche du prix des services du capital dans l'industrie *i* :

$$PP_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{iat} K_{iat}}{\sum_a c_{ia,t-1} K_{iat}} = \frac{R_{it}}{\sum_a c_{ia,t-1} K_{iat}} \qquad [190]$$

- l'indice de Fisher du prix des services du capital dans l'industrie *i* :

$$FP_{it}^{K} = \sqrt{LP_{it}^{K} PP_{it}^{K}} \qquad [191]$$

Sachant que, en vertu de [136],

$$FP_{it}^{K} FQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ait} K_{ait}}{\sum_a c_{ai,t-1} K_{ai,t-1}} \qquad [192]$$

On peut obtenir l'indice de Fisher du prix des services du capital au moyen de la formule

$$FP_{it}^{K} = \frac{1}{FQ_{it}^{K}} \frac{\sum_a c_{iat} K_{iat}}{\sum_a c_{ia,t-1} K_{ia,t-1}} \qquad [193]$$

Ajoutons que, tel que spécifié à la section 2.2, pour toute agrégation d'industries (comme l'ensemble des industries productrices de biens ou l'ensemble du secteur des entreprises), les indices de Fisher du volume et du prix du capital sont calculés à partir des indices de Laspeyres et de Paasche agrégés, et non pas par agrégation directe des indices de Fisher[37]. La pratique semble donc avoir changé depuis la rédaction de l'exposé de Harchaoui et autres (2004, p. 29-30, équation 23).

Il est à noter que les agrégations selon la formule de Törnqvist définies aux équations 22, 23 et 25 de Baldwin et Gu (2007, p. 52-53) n'ont été utilisées qu'aux fins des expériences dont les résultats sont rapportés dans ce document[38]. À cet égard, l'affirmation selon laquelle « La mesure des services du capital des programmes de la productivité multifactorielle de Statistique Canada est semblable à celle

[37] Cela est confirmé par Wulong Gu, selon qui, cependant, la non-additivité se manifeste de façon sensible seulement pour le capital : « I found that for GDP, gross output, intermediate inputs, and labour inputs, two-or-more-stage aggregation and one-stage aggregation yield similar estimates. But the capital service estimates from one-stage vs. two stage aggregations differ slightly. » (correspondance du 15 mai 2009).

adoptée aux États-Unis par le Bureau of Labor Statistics. » (Baldwin et autres 2007) peut porter à confusion, puisque le Bureau of Labor Statistics (2006), lui, utilise des indices de Törnqvist.

2.3.3 TRAVAIL

Le traitement du travail dans la méthode d'estimation de la PMF de Statistique Canada est décrite dans Gu et autres (2002) et Baldwin et autres (2007; en particulier pp. 27-28 et 41-45). Cependant, Gu et autres (2002) ont mené leurs travaux avant les changements méthodologiques que l'on peut constater en comparant Baldwin et autres (2007) et Harchaoui et autres (2004)[39]. Néanmoins, c'est à Gu et autres (2002) que renvoient Baldwin et autres (2007) pour les détails méthodologiques. Cela oblige à un certain travail d'exégèse pour bien saisir comment procède Statistique Canada; il en sera question sous peu.

2.3.3.1 Indices de volume du travail

Le volume de l'intrant travail est mesuré par le nombre d'heures travaillées, plus précis que le nombre d'emplois. La mesure de l'intrant travail, comme celle de l'intrant capital, tient compte de la composition du travail, afin d'appréhender des différences de productivité telles qu'elles se reflètent, selon la théorie microéconomique de la production, dans les différences de salaire. Pour tenir compte de la composition de la main-d'œuvre, on procède comme pour le capital : on construit des indices de Fisher de l'intrant travail par industrie à partir des indices correspondants de Laspeyres et de Paasche. Pour toute agrégation désirée de plusieurs industries (comme les industries productrices de biens ou l'ensemble du secteur des entreprises), l'indice de Fisher est calculé à partir des indices agrégés correspondants de Laspeyres et de Paasche, et non pas en agrégeant les indices de Fisher des industries individuelles, puisque ce dernier indice n'est pas additif alors que les deux autres le sont.

Toutefois, la présentation de Gu et autres (2002) peut inspirer des doutes quant au type d'indice utilisé, puisque leur discussion est formulée en termes d'une agrégation des composantes selon les parts dans la masse salariale, ce qui correspond à un indice de Törnqvist, comme l'indique l'équation (11) de Gu et autres (2002, p. 76). Il est d'ailleurs possible que ces derniers aient utilisé des indices de Törnqvist dans leurs travaux de 2002. Mais l'échange de correspondance avec Wulong Gu rapporté en 2.2 a permis de confirmer que, dans la méthode courante de Statistique Canada, le volume de l'intrant travail est mesuré au moyen d'un indice de Fisher[40].

---

[38] Précision obtenue de Wulong Gu dans un échange de correspondance.

[39] Ce document avait été publié antérieurement comme annexe 1 de Baldwin et Harchaoui (2002), c'est-à-dire dans le même ouvrage que Gu et autres (2002).

[40] C'est ce que confirme le passage suivant : « On établit la mesure globale de ce facteur en agrégeant les données sur les heures de travail pour chacune des 56 catégories de travailleurs (classement selon le niveau de scolarité (4), l'expérience (7) et la

Cela dit, autant que l'indice de Törnqvist, les indices de Laspeyres et de Paasche, dont l'indice de Fisher est la moyenne géométrique, pondèrent les composantes selon leurs prix relatifs. Ainsi, l'indice de Laspeyres défini en [062] peut s'écrire sous la forme

$$Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i s_i^{0,0} \frac{x_i^1}{x_i^0}, \text{ où } s_i^{0,0} = \frac{p_i^0 x_i^0}{\sum_j p_j^0 x_j^0} \quad [194]$$

De même, l'indice de Paasche défini en [063] peut s'écrire sous la forme

$$Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i s_i^{1,0} \frac{x_i^1}{x_i^0}, \text{ où } s_i^{1,0} = \frac{p_i^1 x_i^0}{\sum_j p_j^1 x_j^0} \quad [195]$$

Enfin, l'indice de Törnqvist défini en [077] peut s'écrire sous la forme

$$\ln Q_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i \bar{s}_i \ln\left(\frac{x_i^1}{x_i^0}\right), \text{ où } \bar{s}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{p_i^0 x_i^0}{\sum_j p_j^0 x_j^0} + \frac{p_i^1 x_i^1}{\sum_j p_j^1 x_j^1}\right) = \frac{1}{2}\left(s_i^{0,0} + s_i^{1,1}\right) \quad [196]$$

Dans les trois cas, les poids utilisés varient avec les prix relatifs : si la quantité d'un intrant augmente et que son prix est relativement élevé, c'est-à-dire si sa productivité est présumément supérieure, alors l'indice de quantité augmente davantage que si l'intrant a un prix relativement faible. Par ailleurs, les indices de Fisher et de Törnqvist étant des indices superlatifs, ils sont exacts pour une fonction d'agrégation flexible qui peut être considérée comme une approximation de la « vraie » fonction d'agrégation. Rappelons que cet argument repose sur l'hypothèse que la fonction de production est séparable et qu'il existe une fonction d'agrégation de l'intrant travail.

2.3.3.2 Dimensions de la composition du travail

La mesure de l'intrant travail tient compte de trois dimensions dans la composition du facteur : l'âge (sept tranches d'âge; variable de substitution pour l'expérience), la scolarité (quatre niveaux de scolarité) et la catégorie d'emploi (travailleurs rémunérés et travailleurs autonomes). Bien que les données par sexe existent, cette dimension n'est pas prise en compte, et ce, en dépit de l'écart salarial qui est constaté entre les sexes *ceteris paribus*. En fait, il faudrait dire justement *à cause* de cet écart salarial. L'argument invoqué est le suivant : « Essentiellement, nous supposons qu'une fois prises en compte les différences d'âge et de scolarité et les deux catégories d'emploi, les différences de gains entre les hommes et les

catégorie d'emploi (2)) dans un indice de Fisher à chaînage annuel. » (Baldwin et autres 2007, p. 41). C'est en outre ce qu'indique le préfixe « IF » (Indice de Fisher) de la variable IFQL du tableau 4 dans Baldwin et autres (2007, p. 35).

femmes ne tiennent pas à des différences de productivité entre les deux sexes, mais plutôt à d'autres facteurs, comme la discrimination en milieu de travail. » (Baldwin et autres 2007, p. 27). Cet argument est cohérent avec l'objectif poursuivi d'appréhender des différences de productivité telles qu'elles se reflètent à l'équilibre dans les différences de salaire.

On a indiqué en 2.3.2.3 que la rémunération du capital des entreprises non constituées en société est obtenue en soustrayant du revenu mixte le revenu imputé du travail des travailleurs autonomes et des travailleurs familiaux non rémunérés (Harchaoui et autres 2004, p. 20-21). Auparavant, la rémunération imputée du travail des travailleurs autonomes était calculée en supposant que ceux-ci gagnaient le même salaire que les employés. Mais « Les données du Recensement de la population à partir de 1990 remettent en question l'hypothèse selon laquelle les travailleurs autonomes gagnent un revenu semblable à celui des employés : le revenu des travailleurs autonomes a crû moins vite que celui des employés On fait donc plutôt l'hypothèse que les revenus des travailleurs autonomes sont *proportionnels* à ceux des employés de même niveau de scolarité et d'expérience. Pour chaque niveau de scolarité et d'expérience, le facteur de proportionnalité est basé sur le revenu horaire moyen des travailleurs autonomes par rapport à celui des employés selon le Recensement de la population. » (Baldwin et autres 2007, p. 27-28).

2.3.3.3 Sources de données

De façon plus détaillée, les données de travail proviennent de deux filières. La première est celle du Compte de la productivité du travail de Statistique Canada, qui fournit les données sur les heures travaillées et les gains par industrie et par catégorie d'emploi (travailleurs rémunérés, d'une part, et les travailleurs autonomes et les travailleurs familiaux non rémunérés, d'autre part), mais sans ventilation selon l'âge et le niveau de scolarité.

Les heures travaillées sont définies comme le nombre d'heures passées au travail, qu'elles soient rémunérées ou non; cela inclut, par exemple, les pauses, mais exclut les heures payées non travaillées (vacances payées, congés de maladie...). La rémunération du travail comprend tous les paiements, en espèces ou en nature, faits par les producteurs aux travailleurs en contrepartie de leurs services (y compris, par exemple, les pourboires et les indemnités imposables, ainsi que la rémunération supplémentaire du travail).

Le nombre d'heures est calculé en multipliant la moyenne annuelle des heures par le nombre d'emplois. Les données sur l'emploi du Compte de la productivité du travail proviennent d'enquêtes auprès des ménages (Enquête sur la population active – EPA; Enquête sur la dynamique de l'emploi, du travail et du revenu – EDTR; recensements de la population) et auprès des entreprises (Enquête sur l'emploi, la rémunération et les heures de travail – EERH; l'Enquête annuelle sur les manufactures et l'exploitation forestière – EAMEF). La plupart des données sur le nombre moyen d'heures travaillées proviennent de l'EPA.

La rémunération horaire des employés est obtenue en divisant la rémunération totale par le nombre d'heures travaillées. La rémunération des travailleurs employés est estimée par la Division des comptes des revenus et des dépenses. Dans le cas des travailleurs autonomes, on suppose une rémunération horaire proportionnelle à celle des salariés de même niveau de scolarité et d'expérience. Les facteurs de proportionnalité sont calculés au moyen des données du Recensement de la population. Il n'est pas dit explicitement que la rémunération horaire imputée aux travailleurs familiaux non rémunérés a été modifiée elle aussi par rapport à la pratique antérieure; on peut sans doute présumer que oui (« On recourt à la même méthode d'imputation pour produire les données relatives aux travailleurs familiaux non rémunérés. » – Baldwin et autres 2007, p. 43).

La deuxième filière consiste à exploiter les données des enquêtes auprès des ménages et des recensements pour obtenir les heures travaillées et les gains selon l'industrie, l'âge, le niveau de scolarité et la catégorie d'emploi. L'attention se porte ici uniquement sur la pratique des années récentes. Les heures travaillées sont tirées des données de recensement pour les années censitaires de référence (les plus récentes étant 2000 et 2005). Pour les années non censitaires, les données sont interpolées. Depuis 1997, l'EPA recueille des données qui permettent d'estimer les gains horaires; c'est donc cette source qui est utilisée.

Les données des deux filières sont combinées au moyen d'une harmonisation fondée sur les dimensions qui leur sont communes (l'industrie et la catégorie de travailleur)[41]. Cette harmonisation doit tenir compte du fait que les données du recensement se rapportent à la semaine de référence, tandis que celles des Comptes de productivité du travail se rapportent à l'année précédente. On calcule le nombre d'heures travaillées en multipliant le nombre d'heures travaillées durant la semaine de référence du recensement par le nombre de semaines travaillées l'année précédente.

[41] Il faut signaler que l'avant-dernier alinéa de la section 4.3.2 de la version anglaise Baldwin et autres (2007, p 40) a été malencontreusement remplacé dans la version française (p. 44-45) par la répétition, avec quelques variantes, d'un alinéa de la p. 43. Cet alinéa traite de la méthode de combinaison des données des deux filières. Voici le texte du paragraphe manquant : « ***Combining the data from household surveys and the Census of Population with the estimates of the productivity program.*** The data on hours worked and earnings that are constructed from household surveys and the Census of Population are reconciled with the annual benchmark data used in Statistics Canada's labour productivity program. The two sets of data were reconciled using their common variables (industry and class of worker category). Constructing the hoursworked data required reconciliation, since number of hours worked derived from the census refers to the census week while earnings and number of weeks worked refer to the previous year. Hours worked are computed by multiplying the average hours worked during the census reference week by the number of weeks worked in the previous year. ».

3. MÉTHODOLOGIES D'AUTRES ORGANISMES

3.1 Bureau of Labor Statistics des États-Unis

Le Bureau of Labor Statistics des États-Unis (BLS) produit des mesures de productivité multifactorielle depuis le début des années 1980. On trouve sur le site du BLS une page d'accueil sur la productivité multifactorielle (http://www.bls.gov/mfp/). De plus, le BLS tient à jour un portail Internet d'accès aux documents méthodologiques courants, appelé « BLS Handbook of Methods » (http://www.bls.gov/opub/hom/home.htm). À partir de ce portail, on accède à une table des matières (http://www.bls.gov/opub/hom/homtoc.htm) où l'on trouve notamment deux chapitres relatifs aux mesures de productivité (Bureau of Labor Statistics 1997a et b).

Comme Statistique Canada, le BLS produit trois ensembles de données sur la productivité. Le premier couvre la productivité du travail et ne nous concerne pas directement ici. Les deux autres ensembles de données portent sur la productivité multifactorielle. L'un présente des mesures de la PMF par rapport à la valeur ajoutée qui distinguent le capital et le travail, pour le secteur commercial et le secteur commercial non agricole (à l'exclusion des entreprises d'État) (« Business sector and major subsectors »). L'autre se rapporte à la PMF par rapport à la production sectorielle (production brute, nette des transactions intrasectorielles) et distingue 5 intrants (KLEMS) pour 18 industries manufacturières SCIAN (BLS 2007) et l'ensemble du secteur de la fabrication (« Industry productivity measures »).

3.1.1 PMF PAR RAPPORT À LA VALEUR AJOUTÉE

Production

Aux fins de la mesure de la PMF par rapport à la valeur ajoutée, la production est un indice de Fisher pondéré annuellement des PIB des industries selon les comptes nationaux (National Income and Product Accounts – NIPA). La définition du secteur commercial et les méthodes de construction de l'indice de la production réelle se trouvent dans l'annexe B de BLS (1983).

Travail

Le BLS fonde sa mesure de l'intrant travail sur la théorie du capital humain, ce qui l'amène à se concentrer sur deux caractéristiques : la scolarité et l'expérience de travail (une variable substitut dans la théorie du capital humain pour l'apprentissage sur le tas). Le BLS écarte d'emblée la possibilité de prendre en compte une multitude d'autres caractéristiques qui ont pourtant un impact sur la rémunération du travail. Ce choix est motivé par un désir de faire ressortir ainsi des sources de croissance conceptuellement identifiables (BLS 1993, annexe A, p. 38).

La mesure de l'intrant travail pour la PMF par rapport à la valeur ajoutée (mais pas pour la PMF par rapport à la production sectorielle) est obtenue en agrégeant les heures travaillées selon le niveau de scolarité (7), l'expérience (72) et le sexe (7 × 72 × 2 = 1008 types de travailleurs), au moyen d'un indice de Törnqvist. Les données sur les heures des employés à la production proviennent de son propre Current Employment Statistics program, une enquête auprès des établissements. Les heures des autres travailleurs salariés sont estimées à partir des données du Current Population Survey, une enquête du BLS auprès des ménages (Eldridge et autres 2004; BLS 2004). Les heures des travailleurs autonomes et des travailleurs agricoles sont également construites à partir du Current Population Survey (BLS 2006b).

Les données sur les heures de travail distinguent initialement 72 catégories d'âge, et non d'expérience au travail. Les données sur les femmes sont ventilées selon deux dimensions supplémentaires, l'état civil (2) et le nombre d'enfants (4 catégories). À partir de ces données, on calcule le nombre d'années d'expérience en fonction de l'âge et de la scolarité au moyen de paramètres estimés économétriquement. Les paramètres du modèle économétrique ont été estimés sur un échantillon apparié de 1973 tiré du Current Population Survey, d'historiques individuels de travail des fichiers de la Social Security Administration et d'enregistrements de l'Internal Revenue Service (BLS 1993, chapitre 1 et annexe A).

La rémunération horaire moyenne pour chacune des 1008 catégories de travail est estimée économétriquement, séparément pour les hommes et les femmes, chaque année sur un échantillon des répondants du Current Population Survey (pour les années antérieures à 1967, sur les données du recensement décennal de la population, avec interpolation entre les années censitaires). L'objectif de cette procédure est de purger les données de rémunération, autant que faire se peut, de l'effet des caractéristiques autres que la scolarité et l'expérience (BLS 1993, annexe A). Le taux horaire assigné à chaque catégorie scolarité/expérience est donc le taux prédit en supposant que les autres caractéristiques sont les valeurs moyennes de l'ensemble des travailleurs de même sexe. Ainsi, tout changement des caractéristiques autres que la scolarité et l'expérience a un effet proportionnel égal sur la rémunération horaire de toutes les catégories scolarité/expérience d'un même sexe, de sorte que la composition de la main-d'œuvre n'en est pas affectée; celle-ci est cependant affectée par les changements différents chez les hommes et les femmes des caractéristiques autres que la scolarité et l'expérience. Selon le BLS, la mesure de rémunération horaire qui en résulte est plus proche d'une mesure de rendement du capital humain (scolarité et expérience)[42]. Le résultat est de renvoyer les changements des autres caractéristiques dans le résidu de la décomposition de la croissance (la PMF). Un autre avantage allégué de l'approche du BLS est une plus grande précision dans l'estimation du taux horaire de celles parmi les 1008 catégories qui comptent un petit nombre d'individus.

Dans la pondération de l'agrégation Törnqvist, les heures travaillées des travailleurs autonomes et des travailleurs familiaux non rémunérés sont traitées différemment de ce que fait Statistique Canada. Dans un premier temps, le BLS fait l'hypothèse que, d'une part, les heures travaillées des travailleurs autonomes et familiaux sont rémunérées au même taux que celles des travailleurs rémunérés et que, d'autre part, le taux de rendement sur le capital des entreprises non constituées en sociétés est le même que celui des sociétés; on calcule ensuite le revenu mixte qui en découle. Dans un deuxième temps, le BLS ajuste proportionnellement les taux de rémunération horaire du travail et les taux de rendement du capital des entreprises non constituées en société dans chaque industrie, de façon à ce que le revenu mixte calculé soit égal au revenu mixte observé. Cette manière de procéder traduit l'hypothèse que tout écart du revenu mixte observé par rapport au revenu mixte hypothétique calculé affecte proportionnellement le revenu du travail et celui du capital.

Capital

L'intrant capital comprend les machines et matériel, les bâtiments et ouvrages de génie, les inventaires et les terrains (42 catégories d'actifs selon BLS 2007). Les actifs sont agrégés par industrie (60 industries SCIAN selon BLS 2007) au moyen d'un indice de Törnqvist en chaîne fondé sur des coûts d'usage estimés, puis par secteur au moyen d'un indice de Törnqvist (c'est donc un Törnqvist de Törnqvists). Pour un exposé détaillé de la méthode d'élaboration de l'intrant capital, la documentation courante du BLS renvoie encore – bien que ce soit un document qui n'est pas récent – à l'annexe C de BLS (1983). Ce document contient notamment un très utile tableau sommaire des étapes du calcul de la PMF, des méthodes et des sources de données (BLS 1983, p. 39-40), ainsi que des analyses de sensibilité des résultats aux différents choix méthodologiques.

Pour les machines et matériel et les bâtiments et ouvrages de génie, les stocks sont estimés au moyen de la méthode de l'inventaire perpétuel à partir de données d'investissement des comptes nationaux (NIPA) du Bureau of Economic Analysis (BEA). Les données de stocks d'inventaires proviennent aussi des comptes nationaux. Pour ce qui est des données sur des terrains agricoles, elles sont fournies par le Service de recherche du U.S. Department of Agriculture (USDA). Quant aux données relatives aux terrains non

[42] Ce point de vue s'oppose à celui du modèle d'information imparfaite du marché du travail, selon lequel les écarts de salaire ne représentent pas nécessairement des différences de productivité. Cette question est discutée dans BLS (1993, annexe A).

agricoles, elles sont extrapolées à partir de données repères. Les repères sont calculés au moyen de rapports terrains/bâtiments estimés par le Bureau of Census; ces rapports sont appliqués à la valeur des bâtiments selon les estimations produites par le BLS. Les données repères sont extrapolées en fonction des stocks bruts de bâtiments calculés à partir des données d'investissement du BEA. Enfin, les terrains non agricoles sont alloués entre les industries en s'appuyant sur des données de l'Internal Revenue Service sur la valeur comptable des terrains.

Dans l'application de la méthode de l'inventaire perpétuel, le BLS utilise une fonction de l'efficacité en fonction de l'âge qui est différente de la fonction géométrique employée par Statistique Canada et par le BEA même[43]. Le BLS utilise une fonction hyperbolique[44] de la forme

$$d_t = \frac{T-t}{T-\beta t} \qquad [197]$$

où d_t est le coefficient d'efficacité relative d'un actif d'âge t dont la vie utile est de T. Le BLS fixe le paramètre β à 0,5 pour les machines et matériel et à 0,75 pour les bâtiments et ouvrages de génie. Les motifs de ces choix sont exposés en détail dans BLS (1983, annexe C). Les durées de vie utile sont spécifiques à chaque actif et à chaque industrie. BLS (2006a) laisse entendre que les durées de vie utile sont ajustées pour que le taux de dépréciation qui découle de la fonction d'efficacité soit comparable au taux de dépréciation estimé par le BEA[45].

Par ailleurs, puisque les données d'investissement des comptes nationaux (NIPA) se rapportent à une année, il s'ensuit que les stocks de capital estimés sont des stocks de fin d'année. Le BLS fait donc l'hypothèse que le stock moyen disponible durant une année est la moyenne du stock à la fin de cette année-là et de celui de la fin de l'année précédente (BLS 1983, annexe C, p. 48-49).

Ajoutons que, pas plus que les autres agences statistiques, le BLS ne s'aventure à élargir la mesure du capital au stock de recherche et développement (R-D). Mais il construit une mesure du stock de R-D selon une méthode similaire à celle de l'inventaire perpétuel et il estime la part de la variation de la PMF qui serait attribuable à la variation du stock de R-D (BLS 2006a, p. 4).

---

43 La méthode d'estimation du stock de capital du BEA est décrite dans BEA (2003).

44 Cette forme fonctionnelle est examinée dans Statistique Canada (2007).

45 Rappelons que seule la courbe d'efficacité géométrique engendre un taux de dépréciation constant qui est le paramètre même qui définit la courbe d'efficacité en fonction de l'âge.

3.1.2 PMF PAR RAPPORT À LA PRODUCTION SECTORIELLE

Production

Pour la PMF par rapport à la production sectorielle, on obtient la production des industries manufacturières par déflation de la production en dollars courants du Bureau of the Census. Les déflateurs utilisés sont construits par le BEA, qui combine pour ce faire des données provenant du programme de prix aux producteurs du BLS et d'autres sources. Les expéditions de chaque industrie sont ajustées pour les variations d'inventaire; les transactions intrasectorielles sont ensuite soustraites. La mesure de la production de chaque industrie est un indice de Törnqvist de ses expéditions par produit (BLS 2007b). On obtient des indices de référence pour les années censitaires (Census of Manufactures, Census of Retail Trade, Census of Service Industries et Census of Mineral Industries). Les indices annuels sont élaborés autant que possible de la même manière, à partir de données d'autres sources que les recensements. Pour certaines industries, on emploie des indices de la quantité physique de production (industrie minière, transports et fabrication de matières premières).

Intrants

La mesure de l'intrant travail pour la mesure de la PMF par industrie est différente de celle qui est utilisée pour la PMF par rapport à la valeur ajoutée : c'est une simple somme des heures travaillées, sans égard à la composition de la main-d'œuvre. Les indices d'intrants intermédiaires (E, M et S) sont construits à partir de données des TES et d'enquêtes auprès des établissements manufacturiers et autres, ainsi que d'indices de prix. Les cinq intrants (KLEMS) sont agrégés au moyen d'un indice de Törnqvist enchaîné.

La mesure de l'intrant capital est la même que pour la mesure de la PMF par rapport à la valeur ajoutée, sauf pour ce qui est de l'estimation du coût d'usage du capital. Le coût d'usage par actif et par industrie est calculé par le BLS selon la même formule que Statistique Canada, mais ne tient pas compte des taxes indirectes sur les entreprises (« indirect business taxes »), une expression qui désigne probablement les impôts fonciers.

3.1.2 COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DE STATISTIQUE CANADA

On voit que, dans ses grandes lignes, la méthode du BLS est similaire à celle de Statistique Canada, bien que celle-ci recoure à des indices de Fisher, sauf aux étapes ultimes du calcul, tandis que le BLS utilise des agrégations à la Törnqvist de manière plus généralisée. Harchaoui et autres (2004, p. 32-36) passent en revue les principales différences entre les pratiques du BLS et celles de Statistique Canada. Ils font état de différences significatives dans la méthode d'agrégation des heures travaillées, mais l'évolution des méthodes de Statistique Canada entre la « Méthodologie 2000 » (Harchaoui et autres 2004) et le « Guide » (Baldwin et autres 2007) semble avoir réduit considérablement les différences. Il en est de même de la mesure de l'intrant capital. Il reste que Statistique Canada publie un éventail plus large de mesures de productivité : le BLS ne mesure pas la PMF selon la production brute et il ne mesure la PMF selon la valeur ajoutée que pour le secteur commercial et le secteur commercial non agricole.

Il ne faut pas croire pour autant que la similarité des méthodes rend faciles les comparaisons Canada-États-Unis. Baldwin et autres (2008, p. 16-28) font un examen détaillé des concepts et méthodes de Statistique Canada et du BLS et ils élaborent une mesure de la PMF par rapport à la valeur ajoutée du Canada relative à celle des États-Unis. Ils doivent pour ce faire résoudre de nombreux problèmes. En particulier :

- Aux États-Unis, l'industrie des finances, assurances et services immobiliers inclut les loyers des immeubles occupés par leurs propriétaires, mais pas au Canada.
- Le BEA calcule le PIB par industrie aux prix du marché, tandis que Statistique Canada le fait aux prix de base.
- Il faut ajuster les taux de conversion entre les devises canadienne et états-unienne à parité de pouvoir d'achat (PPA), pour les appliquer à des valeurs aux prix de base.
- Les auteurs sont forcés de mesurer le facteur travail sans égard à la composition de la main-d'œuvre et, par surcroît, d'estimer à nouveau les heures travaillées aux États-Unis pour obtenir des données comparables, tirées d'un côté comme de l'autre d'enquêtes auprès des ménages.
- Bien que la mesure des services du capital par Statistique Canada et le BLS soient à peu près comparables quant au taux de croissance, les différences de méthodologie ne permettent pas de comparer les niveaux. Les auteurs construisent donc pour les deux pays une mesure des services relatifs du capital.

Au plan méthodologique, la conclusion générale que l'on peut tirer du travail de Baldwin et autres (2008) est qu'en dépit de la parenté entre les méthodes, les comparaisons internationales sont ardues.

3.2 OCDE

L'OCDE entretient une base de données internationales (« Structural analysis data base » – STAN[46]). Cette base de données peut servir à comparer la performance industrielle entre pays, selon une classification industrielle standardisée, à un niveau relativement détaillé. Elle comprend des mesures annuelles de la production, du travail, de l'investissement et du commerce internationaux, permettant aux

46 http://www.oecd.org/document/62/0,3343,en_2649_34445_40696318_1_1_1_1,00.html

utilisateurs de construire une panoplie d'indicateurs relatifs à la croissance de la productivité, à la compétitivité et au changement structurel en général. On trouve aussi sur le site de l'OCDE une page dédiée à la productivité[47], à partir de laquelle on peut accéder à des estimations de la croissance de la PMF globale pour 19 pays[48], ainsi qu'à des documents méthodologiques et de recherche. En outre, l'OCDE participe au projet EU KLEMS du Groningen Growth & Development Center (GGDC) de l'Université de Groningen (voir 3.3).

Le *Manuel* sur la mesure de la productivité par secteur (OCDE 2001a) a pour objectif de fournir un guide à l'élaboration de mesures de la productivité par industrie au moyen de méthodes non paramétriques[49] de manière à favoriser l'harmonisation internationale, par l'application de méthodes qui constituent des compromis judicieux entre, d'une part, les fondements théoriques et les caractéristiques souhaitables des mesures et, d'autre part, la disponibilité des données. Le manuel est d'emblée orienté vers la mesure de la croissance de la productivité, plutôt que vers l'estimation des niveaux de productivité et les comparaisons internationales. On évite ainsi l'épineuse question de la conversion des devises (qui constitue au contraire le « fonds de commerce » du GGDC : voir 3.3).

En plus d'une présentation des mesures de la productivité (chap. 2), de la mise en œuvre d'un programme d'estimation de la PMF (chap. 9 : presque un livre de recettes!) et de l'interprétation de la PMF (chap. 10[50]), le *Manuel* traite successivement des différentes composantes de la mesure de la productivité : production (production brute et valeur ajoutée; chap. 3), travail (chap. 4[51]), capital (chap. 5[52]) et intrants intermédiaires (chap. 6), ainsi que du choix des nombres-indices (chap. 7) et des questions d'agrégation (chap. 8). Le *Manuel* énonce des principes généraux, passe en revue les différentes options méthodologiques et compare sommairement leurs avantages et inconvénients. Il discute de plusieurs points de difficulté conceptuelle et pratique. Mentionnons :

- la possibilité que le processus de double déflation produise des valeurs ajoutées négatives (p. 33-35);
- la nécessité d'estimations indépendantes de la production et des intrants (qui, en particulier, rend impraticable la mesure de la productivité des administrations publiques; p. 35-36);

---

47 http://www.oecd.org/topicstatsportal/0,3398,en_2825_30453906_1_1_1_1_1,00.html

48 http://stats.oecd.org/WBOS/Index.aspx?DatasetCode=MFP. Il est à noter que Statistique Canada est très critique des estimations de la PMF globale du Canada par l'OCDE (Harchaoui et autres 2004, p. 36).

49 Cela exclut donc les estimations économétriques de la productivité, décrites à l'encadré 1 du *Manuel* (2001a, p. 19).

50 Entre autres, on y discute de l'interprétation de l'évolution de la PMF du point de vue de l'évolution des coûts (p. 122-123).

51 Voir notamment le schéma d'une démarche de mesure du facteur travail (p. 46) et le compte rendu des pratiques des agences statistiques quant à la prise en compte de la composition du travail (p. 49-52).

52 Voir en particulier la clarification terminologique (p. 54-56), reprise dans le glossaire de l'annexe 1, et mathématiquement explicitée à l'annexe 4. Voir aussi la présentation des pratiques des agences statistiques quant à la mesure de l'intrant capital (p. 58-61, notamment le tableau sommaire 7).

- comment traiter les variations de qualité et les nouveaux produits, une question portée à l'avant-plan par l'émergence des nouvelles technologies de l'information et des communications (p. 36-39);
- l'utilisation d'enquêtes sur la population active ou d'enquêtes auprès des établissements pour l'estimation de l'intrant travail (p. 44-45);
- la répartition du revenu mixte entre le travail et le capital (p. 47-48).

Le chapitre sur le capital (chap. 5) est de loin le plus long du livre et deux des quatre annexes techniques sont consacrées à ce sujet. Cela témoigne de la grande complexité de la mesure de l'intrant capital. L'OCDE publie d'ailleurs un second *Manuel*, portant exclusivement sur la mesure du capital (OCDE 2001b). Ce manuel contient en particulier plusieurs exemples numériques pour illustrer les concepts fondamentaux et certains choix méthodologiques. Le manuel sur la mesure du capital a fait l'objet d'une refonte (OCDE 2009), mais il semble que la traduction française ne soit pas encore disponible.

Les manuels de l'OCDE posent avec une clarté remarquable le cadre conceptuel général de la mesure du capital. Ce qui suit est une paraphrase de différents passages de ces manuels (OCDE 2001a, p. 54-56 et annexe 1; 2001b, chap. 4).

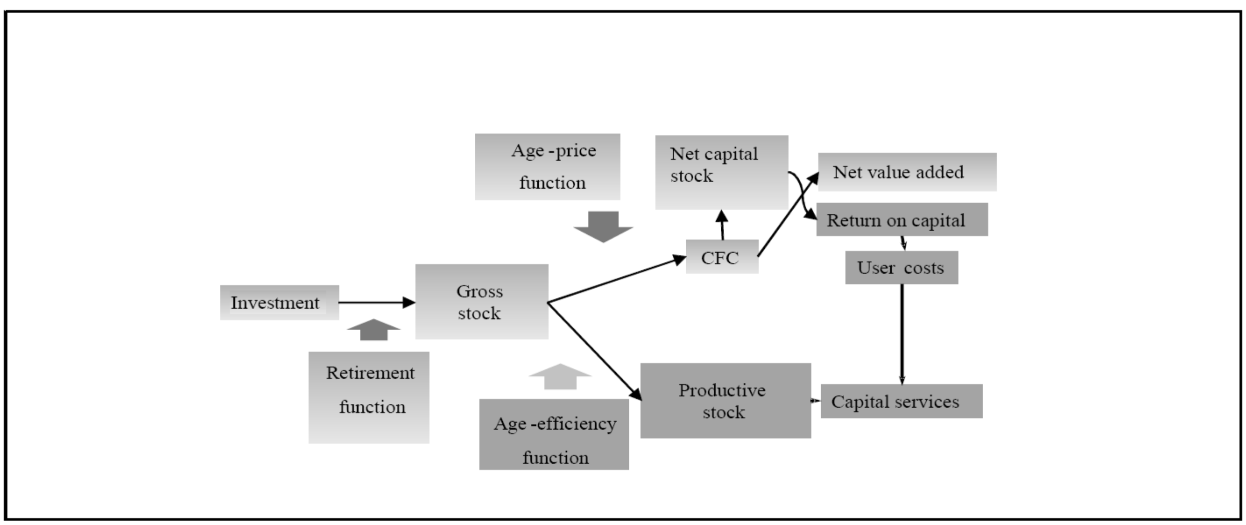
Dans l'analyse de la production, le concept de capital pertinent est celui des ***services du capital*** : c'est le flux des services productifs fournis par un actif servant à la production. Les services du capital traduisent une quantité (matérielle) à ne pas confondre avec le concept de valeur, ou prix, du capital. Le ***stock de capital productif*** est une mesure de la capacité à fournir des services de capital. On suppose généralement que les derniers sont proportionnels au stock productif. Lorsqu'un stock productif est constitué de plus d'un actif, il est exprimé sous forme d'indice de quantité, soit à prix constants, soit à prix courants; dans ce dernier cas, on parle de stock de capital aux coûts de remplacement. Le ***stock de capital net*** ou ***stock de capital richesse*** (Statistique Canada utilise le mot « patrimoine ») est la valeur marchande courante du stock productif d'une branche d'activité ou d'une économie. Selon la théorie économique, la valeur du stock de capital richesse à prix courants est égale à la valeur présente des recettes futures que généreront ces actifs. Le stock de capital richesse peut s'exprimer à prix constants, aux prix d'une année de base ou sous forme d'un indice de volume.

La contribution d'un actif au stock de capital productif diminue avec l'âge de cet actif et il devient nul quand l'actif est mis hors service. Le ***profil de déclassement*** décrit la manière dont les actifs sont mis hors service. En général, un profil de déclassement évolue autour de la durée de vie prévue ou moyenne. Le profil de déclassement d'un actif est lié à sa fonction de survie en fonction du temps (1 – probabilité de mise hors service à chaque moment ou période). On trouve des exemples des formes courantes de fonction de survie dans OCDE (2001b, p. 56). Quant au ***profil âge-efficience***, il indique la diminution de capacité productive d'un bien d'équipement au cours de sa vie, ou le taux auquel la contribution matérielle d'un actif donné décroît avec le temps, sous l'effet de l'usure. Cette diminution est la ***dépréciation physique***, qu'il ne faut pas confondre avec l'amortissement (voir plus loin).

Le ***profil âge/prix*** indique la diminution de valeur d'un bien d'équipement au fil de son vieillissement. Il décrit donc l'évolution du stock de capital net ou capital richesse. Le profil âge/prix est relié au profil âge/efficacité, mais il en est différent. Le profil âge/prix tient compte, non seulement de la diminution de la capacité productive, mais aussi de la réduction de la vie utile résiduelle. Par exemple, à un profil âge/efficacité de mort subite (« one-hoss shay ») est associé un profil âge/prix linéaire décroissant (si on fait abstraction de l'actualisation). On trouve des exemples de la relation entre la forme du profil âge/efficacité et celle du profil âge/prix dans OCDE (2001b, p. 75). Le profil âge/prix est aussi la structure des prix relatifs pour différentes générations d'un même bien d'équipement (homogène). L'***amortissement*** est la diminution de la valeur d'un actif due au vieillissement. Elle se distingue de la ***consommation de capital fixe*** du Système de comptabilité nationale de 1993 en ce que cette dernière tient aussi compte de l'obsolescence. Dans le contexte de la mesure de la PMF, la perte de valeur due à l'obsolescence est prise en compte dans le terme des gains/pertes en capital de la formule du coût d'usage du capital.

Les relations qui viennent d'être énoncées sont représentées dans la figure suivante.

Figure 3. Integrated set of capital measures



Source : OCDE 2009, p. 15. Traduction française non disponible.

Les *Manuels* de l'OCDE sont des ouvrages de référence de première valeur. Il serait cependant difficile d'en faire un résumé plus complet que le bref survol qui précède sans produire un ouvrage de taille comparable aux originaux. Et alors, quelle utilité? Cependant, la clarté de la présentation de l'OCDE atténue grandement le besoin d'un travail d'interprétation et de synthèse comme celui qu'il a fallu faire pour décrire la méthodologie de Statistique Canada. En outre, Statistique Canada et le BLS ont effectué des choix méthodologiques que ce rapport a tenté de résumer; l'OCDE, au contraire, présente au lecteur un menu de possibilités dont l'applicabilité dépend des conditions dans lesquelles travaille l'utilisateur.

3.3 Groningen Growth & Development Centre

Le « Groningen Growth and Development Centre » (GGDC; http://ggdc.eldoc.ub.rug.nl/) est un groupe de recherche économique créé en 1992 à l'Université de Groningen aux Pays-Bas. Le groupe poursuit des recherches sur l'analyse comparative des niveaux de performance économique et des différences entre les taux de croissance dans l'économie mondiale. Il a développé une expertise, notamment à travers le projet « International comparision of output and productivity » (ICOP), lancé en 1983 avec l'objectif d'élaborer une méthode de comparaison par industrie d'origine des prix, de la production réelle et de la productivité.

Le GGDC est couramment engagé dans un vaste projet financé par la Commission européenne. Le projet, intitulé « Productivity in the European Union: A Comparative Industry Approach » (EU KLEMS2003; http://www.euklems.net/), vise à créer une base de données sur la croissance économique, la productivité, la création d'emploi, la formation de capital et le changement technologique, par industrie, pour tous les pays membres de l'Union européenne (UE), à partir de 1970. Cela inclut un volet de recherche méthodologique en vue d'améliorer les comparaisons internationales. Le projet est mené avec la participation de 15 organisations de toutes les parties de l'UE, comprenant des institutions universitaires, des instituts nationaux de recherche sur les politiques économiques et il bénéficie de l'appui de plusieurs agences statistiques officielles, ainsi que de l'OCDE.

Les outils clés des comparaisons internationales du GGDC sont les indices de prix industriels à parité de pouvoir d'achat (« industry-of-origin purchasing power parities »), aussi appelés rapports de valeur unitaire (« unit value ratios »). La technique utilisée consiste à identifier un échantillon de produits appariés (« matched ») dans la gamme de production d'une industrie donnée, à construire des indices de prix relatifs pour ces produits et à s'appuyer sur ces indices pour construire un indice agrégé pour l'ensemble de la production de l'industrie à comparer. Les données utilisées proviennent des recensements nationaux de la production (comme le recensement des activités manufacturières) (Ark 1993, en particulier chapitre 3). Cette méthode découle du constat qu'en général, les prix des produits appariés sont plus représentatifs des prix des produits non appariés que les quantités correspondantes.

Quant au modèle de mesure de la PMF appliqué par le GGDC, il est assez standard (voir, entre autres, Timmer et autres 2007, ou Inklaar et Timmer, 2008).

On peut donc conclure que l'apport du GGDC concerne davantage la méthodologie des comparaisons internationales que celle de la mesure de la PMF comme telle.

CONCLUSION

Solow (1957) a posé les bases de la mesure de l'évolution de la productivité au moyen d'une décomposition de la croissance. Selon cette approche, la mesure de la productivité multifactorielle (PMF) est essentiellement un exercice de décomposition de la croissance (désigné en anglais par l'expression « growth accounting »). L'exercice consiste d'abord à mesurer la croissance de la production, puis à mettre celle-ci en relation avec la croissance des intrants, pour attribuer à chacun des intrants pris en compte une fraction de la croissance de la production; le résidu (la fraction de la croissance qui n'est attribuée à aucun intrant) est ensuite interprété comme un effet de la croissance de la « productivité multifactorielle ».

Selon la définition de la production (production brute ou production sectorielle ou valeur ajoutée) et la liste des intrants pris en compte (travail et capital, avec ou sans les intrants intermédiaires – énergie, matériaux et services) et selon la façon de mesurer ceux-ci, on obtient des mesures de croissance qui correspondent à différents concepts de la PMF. La première partie du chapitre 1 présente les fondements théoriques de l'analyse de décomposition de la croissance. On y expose les relations entre les différents concepts de PMF (PMF de l'économie dans son ensemble et par industrie, PMF selon la valeur ajoutée et selon la production brute). On y examine aussi l'effet sur la mesure de la PMF de l'intégration verticale et de l'agrégation.

La deuxième partie du chapitre 1 est consacrée au problème des nombres-indices, auquel l'analyse de la productivité est intrinsèquement liée. En effet, réduite à sa plus simple expression, la productivité est le rapport de la production sur les intrants : dès lors qu'il y a plus d'un produit ou plus d'un intrant, il devient nécessaire, pour établir ce rapport, de résumer en un indicateur unique les quantités des produits, d'une part, et les quantités d'intrants, d'autre part. Cette partie commence par une présentation de la théorie économique des nombres-indices et des notions d'indices exacts et superlatifs, dont les indices de Fisher et de Törnqvist sont des exemples. Suit un compte rendu plus détaillé de l'utilisation de l'indice de Fisher dans la mesure de la PMF, selon les propositions avancées par Diewert.

Le deuxième chapitre du rapport décrit la méthodologie de Statistique Canada. Après une description générale, le rapport aborde successivement la mesure de la production et des intrants intermédiaires, celle du capital et enfin, celle du travail. Le troisième chapitre élargit l'horizon à trois organismes : le Bureau of Labor Statistics des États-Unis, l'OCDE et le Groningen Growth & Development Centre (GGDC) de l'Université de Groningen aux Pays-Bas. La partie consacrée à la méthodologie du BLS est la plus développée, parce que les États-Unis sont nos partenaires au sein de l'ALENA et parce que les travaux de comparaison internationale menés par Statistique Canada ont naturellement été avec ce pays. La section sur l'OCDE s'attache surtout à un inventaire des *Manuels* que publie cette organisation. Car l'OCDE ne définit pas *une* méthodologie. Elle propose plutôt une démarche structurée de choix méthodologiques. Enfin, le GGDC concentre ses efforts sur le développement d'une méthodologie de comparaisons internationales des niveaux de PMF, ce qui constitue une étape ultérieure à l'estimation de l'évolution de la PMF au sein d'une économie.

Il serait pour le moins audacieux de la part de l'auteur de faire une évaluation de la méthodologie de Statistique Canada. On peut cependant constater que, depuis les améliorations dont il est fait état dans Baldwin et autres (2007), la méthodologie de Statistique Canada ne présente plus de faiblesses manifestes par rapport aux recommandations de l'OCDE. Par ailleurs, la méthode de Statistique Canada est similaire, dans ses grandes lignes, à celle du BLS, bien que ce dernier montre une préférence marquée pour les agrégations à la Törnqvist plutôt que pour les indices de Fisher. Méthodes similaires, donc, mais pas identiques : de part et d'autre, certains choix méthodologiques sont différents, notamment quant à la prise en compte de la composition du travail et à l'estimation des stocks de capital. Des choix légitimes, mais différents. Évidemment, cela rend les comparaisons Canada–É.-U. difficiles.

Quelques réflexions générales pour conclure. D'abord, ce qui frappe lorsqu'on étudie les méthodes d'estimation de la PMF, c'est la lourdeur et la complexité de la mesure du capital : stock de capital, dépréciation, coût d'usage, services du capital... Chacun de ces thèmes se divise en sous-thèmes. Cela est particulièrement vrai du coût d'usage du capital : taux de rendement, gains en capital, inflation, fiscalité... Ensuite, d'un point de vue plus général, la mesure de la PMF apparaît comme un de ces sujets totalisants, dont les ramifications s'étendent à tous les secteurs de la science économique, un peu comme la modélisation en équilibre général. On pourrait presque dire que, pour être un spécialiste de la PMF, il faut être un spécialiste de toutes les spécialités.

Enfin, et dans une optique plus pragmatique cette fois, il sied de mentionner l'importance des études de sensibilité. Les choix méthodologiques sont nombreux et fortement contraints par la non-disponibilité ou le coût de certaines données-clés. Mais les choix méthodologiques sont plus faciles à faire lorsque ces choix ont un impact limité sur les résultats. C'est ce que permettent d'évaluer les analyses de sensibilité que mènent Statistique Canada et le BLS et, sans doute, tous les organismes qui en ont les moyens.

BIBLIOGRAPHIE

ARK, Bart van (1993). *Manufacturing productivity performance of teh countries from 1950 to 1990*, Coll. « International comparisons of output and productivity (ICOP) », GGDC, University of Groningen, Monograph series, No. 1
En ligne: http://ggdc.eldoc.ub.rug.nl/root/ResMon/No.1/?pPrint=ON&FullItemRecord=ON.

BALDWIN, J.R. et W. GU (dir.) (2008). *La Revue canadienne de productivité. Qu'est-ce que la productivité? Comment la mesure-t-on? Quelle a été la productivité du Canada?*, Statistique Canada, Ottawa, No 15-206-X au catalogue — No 017.

BALDWIN, J.R. et W. GU (2007). *La productivité multifactorielle au Canada: une évaluation de diverses méthodes d'estimation des services de capital*, Coll. « La revue canadienne de productivité - Document de recherche », Statistique Canada, Ottawa, No. 15-206-X au catalogue — No. 009.

BALDWIN, J.R., W. GU et B. YAN (2007). *Guide de l'utilisateur pour le Programme annuel de la productivité multifactorielle de Statistique Canada*, Coll. « La revue canadienne de productivité - Document de recherche », Statistique Canada, Ottawa, No 15-206-X au catalogue — No 014.

BALDWIN, J.R., W. GU et B. YAN (2008). *Niveaux relatifs de productivité multifactorielle au Canada et aux États-Unis: une analyse sectorielle*, Coll. « La Revue canadienne de productivité, Document de recherche », Statistique Canada, Ottawa, No 15-206-X — No 019 au catalogue.

BALDWIN, J.R. et T.M. HARCHAOUI (dir.) (2002). *Croissance de la productivité au Canada - 2002*, Statistique Canada, Ottawa, No 15-204-XIF au catalogue

BALDWIN, J.R. et T.M. HARCHAOUI (2005). *L'intégration des Comptes canadiens de productivité au Système de comptabilité nationale: Situation actuelle et défis à venir*, Statistique Canada, Ottawa. No 11F0026MIF au catalogue — No 004.

BALK, B. M. (2005). « Divisia price and quantity indices: 80 years after », *Statistica Neerlandica* 59(2): 119-158.

BENNETT, T. L. (1920). « The theory of measurement of changes in cost of living », *Journal of the Royal Statistical Society*, 83, 455-62.

BRUNO, Michael (1978). « Duality, Intermediate Inputs and Value Added », dans : Melvyn Fuss et Daniel McFadden (dir.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North Holland.

BUREAU OF ECONOMIC ANALYSIS (2003). *Fixed assets and consumer durable goods in the United-States, 1925-1997*, Bureau of Economic Analysis, Economics and Statistics Administration, U.S. Department of Commerce,
En ligne: http://www.bea.gov/national/pdf/Fixed_Assets_1925_97.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (1983). *Trends in multifactor productivity, 1948-1981*, Bureau of Labor Statistics, Bulletin 2178.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (1993). *Labor composition and U.S. productivity growth, 1948-90*, Bureau of Labor Statistics, Bulletin 2426.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (1997a). « Productivity measures: business sector and major subsectors », dans *BLS Handbook of Methods*, p. 89-98, Bureau of Labor Statistics. En ligne: http://www.bls.gov/opub/hom/pdf/homch10.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (1997b). « Industry productivity measures », dans *BLS Handbook* *of Methods*, p. 103-109, Bureau of Labor Statistics. En ligne: http://www.bls.gov/opub/hom/pdf/homch11.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (2004). *Construction of average weekly hours for supervisory and nonproduction wage and salary workers in private nonfarm establishments*, Bureau of Labor Statistics, En ligne: http://www.bls.gov/lpc/lprswawhtech.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (2006a). *Overview of capital inputs for the BLS multifactor productivity measures*, Bureau of Labor Statistics, En ligne: http://www.bls.gov/mfp/mprcaptl.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (2006b). *Construction of employment and hours for self-employed and other nonfarm workers and for all farm workers, using current population survey data for primary and secondary jobs*, Bureau of Labor Statistics, En ligne: http://www.bls.gov/lpc/lprjobsnote.pdf.

BUREAU OF LABOR STATISTICS (2007). *Technical information about the BLS multifactor productivity measures*, Bureau of Labor Statistics, En ligne: http://www.bls.gov/mfp/mprtech.pdf.

CAVES, D.W., L.R. CHRISTENSEN et W.E. DIEWERT (1982). « The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity », *Econometrica*, 50(6), p. 1393-1414.

CHRISTENSEN, L.R. et D.W. JORGENSON (1969). « The measurement of U.S. real capital input, 1929-1967 », *Review of Income and Wealth*, 15, p. 292-320.

DECALUWÉ, Bernard, André LEMELIN et Nabil ANNABI (2003). *Modèle d'équilibre général pour le Québec : Proposition pour le module capital*, Rapport final présenté au Ministère des Finances du Québec, CIRPÉE et INRS-UCS, 75 pages, non diffusé.

DIEWERT, W. E. (1976). « Exact and superlative index numbers » *Journal of Econometrics* 4: 115-145. Reproduit dans W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 223-257.

DIEWERT, W.E. (1978). «Superlative index numbers and consistency in aggregation». *Econometrica*, vol. 46, no 4, p. 883-900.

DIEWERT, W. Erwin (1981). « The Economic Theory of Index Numbers: A Survey », dans : A. Deaton (dir.) *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, Cambridge University Press, London, pp. 163–208. Reproduit dans W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 177-228.

DIEWERT, W. E. (1987a). « Index numbers », dans : J. Eatwell, M. Milgate et P. Newman (éd.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Vol. 2, The Macmillan Press, p. 767-780. Reproduit dans W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 71-108.

DIEWERT, W. E. (1987b). « Konüs, Alexander Alexandrovich », dans : J. Eatwell, M. Milgate et P. Newman (éd.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Vol. 3, The Macmillan Press, p. 62. Reproduit dans W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 67-68.

DIEWERT, W. E. (1992a). « The measurement of productivity », *Bulletin of Economic Research* 44(3): 163-198.

DIEWERT, W. E. (1992b). « Fisher Ideal output, input and productivity indexes revisited », *Journal of*

Productivity Analysis, Vol. 3, No. 3, 1992, pp. 211-248. Reproduit dans W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 317-356.

DIEWERT, W. E. (1993). « Overview of volume 1 », dans : W. E. Diewert et A. O. Nakamura (1993), *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 1-37.

DIEWERT, W.E. (2004). *Issues in the measurement of capital services, depreciation, asset price changes and interest rates*, Coll. « Discussion Papers », Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, B.C.

DIEWERT, W. E. et R. J. HILL (2009). *Comment on different approaches to index number theory*, Discussion Paper 09-05, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver.

DIEWERT, W.E. et A.M. SMITH (1994). « Productivity measurement for a distribution firm », *Journal of Productivity Analysis*, 5, p. 335-347.

DIVISIA, F. (1925). « L'indice monétaire et la théorie de la monnaie », *Revue d'Économie Politique*, 39, 842-61, 980-1008 et 121-151.

DOMAR, E. D. (1961). « On the measurement of technological change », *Economic Journal* 71(284): 709-729.

ELDRIDGE, L.P., M.E. MANSER et P.F. OTTO (2004). « Alternative measures of supervisory employee hours and productivity growth », *Monthly Labor Review* (April), p. 9-28, En ligne: http://www.bls.gov/opub/mlr/2004/04/art2full.pdf.

GELLATLY, G., M. TANGUAY et B. YAN (2002). « Une méthode alternative d'estimation de la dépréciation économique: nouveaux résultats obtenus au moyen d'un modèle de survie », dans *Croissance de la productivité au Canada - 2002*, sous la dir. de J.R. Baldwin et T.M. Harchaoui, p. 25-69, Statistique Canada, Ottawa, No 15-204-XIF au catalogue.

GU, W., M. KACI, J.-P. MAYNARD et M.-A. SILLAMAA (2002). « Changement de la composition de la population active canadienne et son influence sur la croissance de la productivité », dans *Croissance de la productivité au Canada - 2002*, sous la dir. de J.R. Baldwin et T.M. Harchaoui, p. 71-105, Statistique Canada, Ottawa, No 15-204-XIF au catalogue.

HALL, R.E. (1968). « Technical change and capital from the point of view of the dual », *Review of Economic Studies*, 35(1), p. 35-46.

HARCHAOUI, T.M., M. KACI et J.-P. MAYNARD (2004) « Le programme de productivité de Statistique Canada: concepts et méthodes », dans *Le programme de productivité de Statistique Canada: méthodologie 2000*, sous la dir. de T.M. Harchaoui, M. Kaci, J.-P. Maynard, D. Beckstead et A. Girard, p. 5-41, No 15-002-MIF au catalogue — No 001, Statistique Canada, Ottawa.

HARCHAOUI, T.M. et F. TARKHANI (2002). « Une révision complète de la méthode d'estimation de l'intrant capital pour le programme de productivité multifactorielle de Statistique Canada », dans *Croissance de la productivité au Canada - 2002*, sous la dir. de J.R. Baldwin et T.M. Harchaoui, p. 107-168, Statistique Canada, Ottawa, Notes: No 15-204-XIF au catalogue

HILLINGER, C. (2003). « The money metric, price and quantity aggregation and welfare measurement », *Contributions to Macroeconomics*, 3(1), En ligne: http://www.bepress.com/bejm/contributions/vol3/iss1/art7/.

HULTEN, C. R. (1978). « Growth accounting with intermediate inputs » *Review of Economic Studies* 45(3): 511-518.

INKLAAR, R. et M.P. TIMMER (2008). *GGDC productivity level database: International comparisons* *of output, inputs and productivity at the industry level*, University of Groningen, Research Memorandum GD-104,En ligne: http://ggdc.eldoc.ub.rug.nl/FILES/root/WorkPap/2008/GD-104/gd104online.pdf.

JORGENSON, D. W. and Z. GRILICHES (1967). « The explanation of productivity change » *Review of Economic Studies* 34(3): 249-283.

JUNG, J. (1989). *The calculation of marginal effective corporate tax rates in the 1987 White Paper on Tax Reform*, Working Paper No. 89-6, Department of Finance, Tax Policy and Legislation, Ottawa.

KONÜS, A. A. (1939 [1924]). « The problem of the true index of the cost of living », *Econometrica*, 7, 10-29. Traduction en anglais d'un article paru originalement en 1924, dans le *Bulletin économique de l'Institut de la Conjoncture Économique*, Moscou.

MCKENZIE K. J., M. MANSOUR, et A. BRÛLÉ (1998). *The Calculation of Marginal Effective Tax Rates/Le calcul des taux effectifs marginaux d'imposition*, Working Paper/Document de travail 97-15, Department of Finance/Ministère des Finances, Technical Committee on Business Taxation/Comité technique de la fiscalité des entreprises, Ottawa, Canada.

MALMQUIST, S. (1953). « Index numbers and indifference surfaces » *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, 4(2): 209-242.

ORGANISATION POUR LA COOPÉRATION ET LE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES (2001a). *Mesurer la productivité. Mesurer la croissance de la productivité par secteur et pour l'ensemble de l'économie*, OCDE, Paris. En ligne: http://www.oecd.org/dataoecd/59/29/2352458.pdf.

ORGANISATION POUR LA COOPÉRATION ET LE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES (2001b). *La mesure du capital. Manuel de l'OCDE. La mesure des stocks de capital, de la consommation de capital fixe et des services du capital*, OCDE, Paris. Ce manuel est supplanté par OCDE (2009), dont la traduction française ne semble pas encore disponible.

ORGANISATION POUR LA COOPÉRATION ET LE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES (2009). *Measuring capital. OECD Manual*, OCDE, Paris, En ligne: http://www.olis.oecd.org/olis/2009doc.nsf/LinkTo/NT00000962/$FILE/JT03258144.PDF.

POLLAK, R. A. (1971). *The theory of the cost of living index*, Office of Prices and Living Conditions, Bureau of Labor Statistics, Washington, D.C.

SAMUELSON, P. A. et S. SWAMY (1974) « Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis », *American Economic Review* 64(4): 566-593.

SOLOW, R. M. (1957). « Technical change and the aggregate production function », *Review of Economics and Statistics* 39: 312-320.

STATISTIQUE CANADA (2007). *Taux de dépréciation pour les comptes de productivité*, Coll. « La revue canadienne de productivité - Document de recherche », Statistique Canada, Ottawa, No 15-206-X — No. 005 au catalogue.

STATISTIQUE CANADA (2001). *Guide pour exprimer les comptes d'entrées-sorties en prix constants: sources et méthodes*, Statistique Canada, Ottawa, No 15F0077GIF au catalogue.

TIMMER, M.P., M. O'MAHONY et B.v. ARK (2007). *EU KLEMS growth and productivity accounts: Overview – November 2007 release*, GGDC, University of Groningen, En ligne: http://www.euklems.net/data/overview_07ii.pdf.

TÖRNQVIST, L. (1936). « The Bank of Finland's consumption price index », *Bank of Finland Monthly Bulletin*, 10, 1-8

LISTE DES ÉQUATIONS ET EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES

$$F(Y, J) = 0 \qquad [001]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i = -\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} J_k \qquad [002]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} dY_i + \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} dJ_k = dF \qquad [003]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_k} J_k \frac{\dot{J}_k}{J_k} = \dot{F} \qquad [004]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y_i} Y_i}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \right) \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial J_k} J_k}{\sum_{j=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial J_j} J_j} \right) \frac{\dot{J}_k}{J_k} = \left(\frac{\dot{F}}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \right) \qquad [005]$$

$$T = \frac{\dot{F}}{\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h} \qquad [006]$$

$$\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial Y_h} Y_h = \text{constante} \qquad [007]$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i Y_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \right) \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k J_k}{\sum_{j=1}^{K} w_j J_j} \right) \frac{\dot{J}_k}{J_k} \qquad [008]$$

$$F^i\left(Q_i, X^i, J^i\right) = Q_i - f^i\left(X^i, J^i\right) = 0,\ i = 1, \cdots, N \qquad [009]$$

$$dF^i = dQ_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f^i}{\partial X_{ji}} dX_{ji} - \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial f^i}{\partial J_{ki}} dJ_{ki},\ i = 1, \cdots, N \qquad [010]$$

$$\frac{\dot{F}^i}{Q_i} = \frac{\dot{Q}_i}{Q_i} - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j}{p_i} \frac{X_{ji}}{Q_i} \frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}} \right) - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k}{p_i} \frac{J_{ki}}{Q_i} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) \qquad [011]$$

$$p_i Q_i = \sum_{j=1}^{N} \left(p_j X_{ji} \right) + \sum_{k=1}^{K} \left(w_k J_{ki} \right) \qquad [012]$$

$$Q_i = Y_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij}\ ,\ i = 1,\cdots,N \tag{013}$$

$$J_k = \sum_{i=1}^{N} J_{ki}\ ,\ k = 1,\cdots,K \tag{014}$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h} \frac{\dot{F}^i}{Q_i} \tag{015}$$

$$Q_i = Y_i + X_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_{ij}\ ,\ i = 1,\cdots,N \tag{016}$$

$$\frac{\dot{F}^i}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} = \frac{\dot{Q}_i - \dot{X}_{ii}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j}{p_i} \frac{X_{ji}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} \frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}} \right) - \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{w_k}{p_i} \frac{J_{ki}}{\left(Q_i - X_{ii}\right)} \frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}} \right) \tag{017}$$

$$f^i\left(X^i, J^i\right) = g^i\left(X^i, V_i\right) \tag{018}$$

$$V_i = h^i\left(J^i\right) \tag{019}$$

$$\lambda f^i\left(X^i, J^i\right) = f^i\left(\lambda X^i, \lambda J^i\right) = g^i\left(\lambda X^i, \lambda V_i\right) \tag{020}$$

$$V_i' = h^{*i}\left(J^i\right) = \lambda h^i\left(J^i\right) = \lambda V_i \text{ et}$$

$$g^{*i}\left[X^i, V_i'\right] = g^i\left[X^i, \frac{V_i'}{\lambda}\right] = g^i\left[X^i, \frac{h^{*i}\left(J^i\right)}{\lambda}\right] = g^i\left[X^i, h^i\left(J^i\right)\right] = f^i\left(X^i, J^i\right) \tag{021}$$

$$q_i V_i = \sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki} \tag{022}$$

$$q_i = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki}}{V_i} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_k J_{ki}}{h^i\left(J^i\right)} \tag{023}$$

$$\frac{\dot{V}_i}{V_i} = \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{\lambda V_i} \frac{d\left(\lambda V_i\right)}{dt} \tag{024}$$

$$F^i\left(Q_i, X^i, J^i\right) = Q_i - g^i\left(X^i, V_i\right) = 0 \text{ avec } V_i = h^i\left(J^i\right),\ i = 1,\cdots,N \tag{025}$$

$$dF^i = dQ_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial g^i}{\partial X_{ji}} dX_{ji} - \frac{\partial g^i}{\partial V_i} dV_i \text{ avec } dV_i = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial h^i}{\partial J_{ki}} dJ_{ki}\ ,\ i = 1,\cdots,N \tag{026}$$

$$\dot{F}^{i} = \dot{Q}_i - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial g^{i}}{\partial X_{ji}}\dot{X}_{ji}\right) - \frac{\partial g^{i}}{\partial V_i}\dot{V}_i \qquad [027]$$

$$\frac{\dot{Q}_i}{Q_i} = \frac{\dot{F}^{i}}{Q_i} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j}{p_i}\frac{X_{ji}}{Q_i}\frac{\dot{X}_{ji}}{X_{ji}}\right) + \frac{q_i}{p_i}\frac{V_i}{Q_i}\frac{\dot{V}_i}{V_i} \qquad [028]$$

$$Z_i = \frac{p_i Q_i - \sum_{j=1}^{N} p_j X_{ji}}{q_i} \qquad [029]$$

$$\frac{\dot{Z}_i}{Z_i} = \frac{1}{q_i V_i / p_i Q_i}\frac{\dot{F}^{i}}{Q_i} + \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{w_k}{q_i}\frac{J_{ki}}{V_i}\frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}}\right) \qquad [030]$$

$$\dot{\Phi}^{i} = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{w_k J_{ki}}{\sum_{h=1}^{K} w_h J_{hi}}\frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}}\right) = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{w_k J_{ki}}{q_i V_i}\frac{\dot{J}_{ki}}{J_{ki}}\right) = \frac{\dot{Z}_i}{Z_i} - \frac{\dot{V}_i}{V_i} = \frac{1}{q_i V_i / p_i Q_i}\frac{\dot{F}^{i}}{Q_i} \qquad [031]$$

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h}\frac{\dot{F}^{i}}{Q_i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i Q_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h}\frac{q_i V_i}{p_i Q_i}\dot{\Phi}^{i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i V_i}{\sum_{h=1}^{N} p_h Y_h}\dot{\Phi}^{i} \qquad [032]$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i Y_i - \sum_{i=1}^{K} w_k J_k = 0 \qquad [033]$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i Y_i = q_i V_i \qquad [034]$$

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i V_i}{\sum_{h=1}^{N} q_h V_h}\dot{\Phi}^{i} \qquad [035]$$

$$P(t)X(t) = \sum_i p_i(t)x_i(t)\,,\ t = 1,\cdots,T \qquad [036]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_i p_i(t)x_i(t) = \sum_i p_i(t)\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} + \sum_i x_i(t)\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} \qquad [037]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\sum_i p_i(t)x_i(t)\right) = \sum_i s_i(t)\frac{\partial \ln x_i(t)}{\partial t} + \sum_i s_i(t)\frac{\partial \ln p_i(t)}{\partial t}, \text{ avec } s_j(t) = \frac{p_j(t)x_j(t)}{\sum_i p_i(t)x_i(t)} \qquad [038]$$

$$\ln\left(\frac{\sum_i p_i(1)x_i(1)}{\sum_i p_i(0)x_i(0)}\right)=\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}\right]dt+\int_0^1\left[\sum_i s_i(t)\frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)}\right]dt \qquad [039]$$

$$C(u,\mathbf{p})=\underset{\mathbf{x}}{MIN}\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} : F(\mathbf{x})\geq u\} \qquad [040]$$

$$c(\mathbf{p})=C(1,\mathbf{p}) \qquad [041]$$

$$C(u,\mathbf{p})=uC(1,\mathbf{p})=uc(\mathbf{p})=F(\mathbf{x})c(\mathbf{p}) \qquad [042]$$

$$C(u,\mathbf{p})=g(u)c(\mathbf{p}) \qquad [043]$$

$$P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{C\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{p}^1\right]}{C\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{p}^0\right]} \qquad [044]$$

$$P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)},\ \forall\mathbf{x} \qquad [045]$$

$$\frac{P(1)}{P(0)}\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{\sum_i p_i(1)x_i(1)}{\sum_i p_i(0)x_i(0)}=\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [046]$$

$$\frac{P(1)}{P(0)}=P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right) \qquad [047]$$

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{1}{P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [048]$$

$$\mathbf{p}^t\cdot\mathbf{x}^t=C\left[F\left(\mathbf{x}^t\right),\mathbf{p}^t\right] \qquad [049]$$

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{1}{P_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}\right)}\frac{C\left[F\left(\mathbf{x}^1\right),\mathbf{p}^1\right]}{C\left[F\left(\mathbf{x}^0\right),\mathbf{p}^0\right]} \qquad [050]$$

$$Q_K\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}\right)=\frac{X(1)}{X(0)}=\frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)}\frac{C\left[F\left(\mathbf{x}^1\right),\mathbf{p}^1\right]}{C\left[F\left(\mathbf{x}^0\right),\mathbf{p}^0\right]}=\frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)}\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)}\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)}=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [051]$$

$$D(u,\mathbf{x})=\underset{k}{MAX}\left\{k>0 : F\left(k^{-1}\mathbf{x}\right)\geq u\right\} \qquad [052]$$

$$Q_M\left(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}\right)=\frac{D\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{x}^1\right]}{D\left[F(\mathbf{x}),\mathbf{x}^0\right]} \qquad [053]$$

$$Q_M\left(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}\right)=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)},\ \forall\mathbf{x} \qquad [054]$$

$$\int_0^1 \left[\sum_i s_i(t) \frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)} \right] dt = P_K\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}\right),\ \forall \mathbf{x} \qquad [055]$$

$$\int_0^1 \left[\sum_i s_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \right] dt = Q_K\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}\right) = Q_M\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}\right) = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)},\ \forall \mathbf{x} \qquad [056]$$

$$P\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [057]$$

$$Q\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [058]$$

$$f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{x}^*),\ \nabla f(\mathbf{x}^*) = \nabla g(\mathbf{x}^*) \text{ et } \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = \nabla^2 g(\mathbf{x}^*) \qquad [059]$$

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_i \sum_j x_i x_j a_{ij} \right)^{1/2},\ \mathbf{x} \in S \qquad [060]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \qquad [061]$$

$$Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i p_i^0 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \qquad [062]$$

$$Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^1 x_i^0} \qquad [063]$$

$$\sum_i p_i x_i = C[F(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = F(\mathbf{x}) c(\mathbf{p}) \qquad [064]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sqrt{\frac{\sum_i p_i^0 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^1 x_i^0}} = \sqrt{\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^0\right)} \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right) c\left(\mathbf{p}^1\right)}} = \frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [065]$$

$$P_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \frac{1}{Q_F\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right)} \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \qquad [066]$$

$$P_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\left(\sqrt{\frac{\sum_i p_i^0 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^1}\frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^1 x_i^1}}\right)\frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0}=\sqrt{\frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1}\frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0}} \qquad [067]$$

$$P_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\sqrt{P_P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0\right)P_L\left(\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^1\right)} \qquad [068]$$

$P_P\left(\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^1\right)=\dfrac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1}=\dfrac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1}$ est l’indice de prix de Paasche [069]

$P_L\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0\right)=\dfrac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^0}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0}=\dfrac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0}$ est l’indice de prix de Laspeyres [070]

$$P_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{F\left(\mathbf{x}^0\right)}{F\left(\mathbf{x}^1\right)}\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)c\left(\mathbf{p}^0\right)}=\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [071]$$

$$c(\mathbf{p})=(\mathbf{pBp})^{1/2}=\left(\sum_i\sum_j p_i p_j b_{ij}\right)^{1/2},\ \mathbf{p}\in S^* \qquad [072]$$

$$P_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\sqrt{\frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0}\frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1}}=\sqrt{\frac{F\left(\mathbf{x}^0\right)c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)c\left(\mathbf{p}^0\right)}\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^1\right)c\left(\mathbf{p}^0\right)}}=\frac{c\left(\mathbf{p}^1\right)}{c\left(\mathbf{p}^0\right)} \qquad [073]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{1}{P_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \qquad [074]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{c\left(\mathbf{p}^0\right)}{c\left(\mathbf{p}^1\right)}\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)c\left(\mathbf{p}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)c\left(\mathbf{p}^0\right)}=\frac{F\left(\mathbf{x}^1\right)}{F\left(\mathbf{x}^0\right)} \qquad [075]$$

$$\ln F(\mathbf{x})=\alpha_0+\sum_{i=1}^N\alpha_i\ln x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\alpha_{ij}\ln x_i\ln x_j\ ,\ \mathbf{x}\in S \qquad [076]$$

$$Q_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\prod_{i=1}^N\left(\frac{x_i^1}{x_i^0}\right)^{\frac{s_i^0+s_i^1}{2}} \qquad [077]$$

$$\tilde{P}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{1}{Q_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i^1x_i^1}{\sum_{i=1}^{N}p_i^0x_i^0} \qquad [078]$$

$$\ln c(\mathbf{p}) = \alpha^*_0 + \sum_{i=1}^{N}\alpha^*_i \ln p_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha^*_{ij} \ln p_i \ln p_j\ ,\ \mathbf{p}\in S \qquad [079]$$

$$P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\frac{s_i^0+s_i^1}{2}} \qquad [080]$$

$$\tilde{Q}_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{1}{P_T\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i^1x_i^1}{\sum_{i=1}^{N}p_i^0x_i^0} \qquad [081]$$

$$Q\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [082]$$

$$P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)>0 \qquad [083]$$

$$P\left(\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0\right)=\frac{1}{P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} \qquad [084]$$

$$P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0\right) \qquad [085]$$

$$\frac{1}{P\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0}=\frac{1}{P\left(\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)}\frac{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^0} \qquad [086]$$

$$Q\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=Q\left(\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) \qquad [087]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\sqrt{\frac{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^0}}<1 \qquad [088]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\sqrt{\frac{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^0}}>1 \qquad [089]$$

$$Q_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)=\sqrt{\frac{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^0}\frac{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^0}}=1 \qquad [090]$$

$$F(\mathbf{y},\mathbf{x})=F\left(y_1,\cdots,y_M,x_1,\cdots,x_N\right)=0 \qquad [091]$$

$$y_1 = f(y_2, \cdots, y_M, x_1, \cdots, x_N) = f(y_2, \cdots, y_M, \mathbf{x}) = \max_{y_1}\{y_1 : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0\} \quad [092]$$

$$x_1 = g(y_1, \cdots, y_M, x_2, \cdots, x_N) = g(\mathbf{y}, x_2, \cdots, x_N) = \min_{x_1}\{x_1 : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0\} \quad [093]$$

$$Q_F^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \sqrt{Q_L^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)\, Q_P^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)} \quad [094]$$

$$Q_F^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \sqrt{Q_L^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)\, Q_P^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)} \quad [095]$$

$$Q_L^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^0} = \frac{\sum_i p_i^0 y_i^1}{\sum_i p_i^0 y_i^0} \quad [096]$$

$$Q_P^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^0} = \frac{\sum_i p_i^1 y_i^1}{\sum_i p_i^1 y_i^0} \quad [097]$$

$$Q_L^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i w_i^0 x_i^1}{\sum_i w_i^0 x_i^0} \quad [098]$$

$$Q_P^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{\sum_i w_i^1 x_i^1}{\sum_i w_i^1 x_i^0} \quad [099]$$

$$\Pi_F(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \frac{Q_F^{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)}{Q_F^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)} \quad [100]$$

$$r^{*t}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \equiv \max_{y}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} : y_1 = f^t(y_2, \cdots, y_M, \mathbf{x})\} \quad [101]$$

$$\Pi_{Th1}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{x}^t) = \frac{r^{*1}(\mathbf{p}^t, \mathbf{x}^t)}{r^{*0}(\mathbf{p}^t, \mathbf{x}^t)},\ t = 0,\ 1 \quad [102]$$

$$r^t(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \equiv \sigma_t\left[\mathbf{p}'\mathbf{A}\mathbf{p}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{p}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}\mathbf{p}'\mathbf{B}^t\mathbf{x}\right]^{1/2},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}',\ \mathbf{C} = \mathbf{C}' \quad [103]$$

$$\Pi_F(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) = \Pi_{Th1}^0(\mathbf{p}^t, \mathbf{x}^t) = \Pi_{Th1}^1(\mathbf{p}^t, \mathbf{x}^t) \quad [104]$$

$$D_{\mathbf{x}}^{*t}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \equiv \max_{\delta > 0}\left\{\delta : y_1 \le f^t\left(y_2, \cdots, y_M, \frac{x_1}{\delta}, \cdots, \frac{x_N}{\delta}\right)\right\} \quad [105]$$

$$Q_{\mathbf{x}M}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{x}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{x}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)}=D_{\mathbf{x}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right) \quad [106]$$

$$Q_{\mathbf{x}M}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{x}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{x}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right)}=\frac{1}{D_{\mathbf{x}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right)} \quad [107]$$

$$D_{\mathbf{x}}^{t}(\mathbf{y},\mathbf{x})=\left[\left(\mathbf{y}'\mathbf{A}^{t}\mathbf{y}\right)^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}^{-1}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}\left(\mathbf{y}^{-1}\right)'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}\right]^{1/2},\ \mathbf{A}^{t}=\mathbf{A}^{t\,\prime},\ \mathbf{C}=\mathbf{C}' \quad [108]$$

$$Q_{F}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^{0},\mathbf{w}^{1},\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)=Q_{\mathbf{x}M}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)=Q_{\mathbf{x}M}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right) \quad [109]$$

$$D_{\mathbf{y}}^{*t}(\mathbf{y},\mathbf{x})\equiv\min_{\delta>0}\left\{\delta : g^{t}\left(\frac{y_{1}}{\delta},\cdots,\frac{y_{M}}{\delta},x_{2},\cdots,x_{N}\right)\leq x_{1}\right\} \quad [110]$$

$$Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)}=D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{0}\right) \quad [111]$$

$$Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{1}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)} \quad [112]$$

$$D_{\mathbf{y}}^{t}(\mathbf{y},\mathbf{x})=\left[\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}\left(\mathbf{x}'\mathbf{C}^{t}\mathbf{x}\right)^{-1}+\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^{-1}\right]^{1/2},\ \mathbf{A}=\mathbf{A}',\ \mathbf{C}^{t}=\mathbf{C}^{t\,\prime} \quad [113]$$

$$Q_{F}^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right) \quad [114]$$

$$\begin{aligned}&\Pi_{F}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1},\mathbf{w}^{0},\mathbf{w}^{1},\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)\\&\quad=\frac{Q_{F}^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^{0},\mathbf{p}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{F}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^{0},\mathbf{w}^{1},\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{\mathbf{x}M}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{Q_{\mathbf{y}M}^{0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{\mathbf{x}M}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{\mathbf{x}M}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}=\frac{Q_{\mathbf{y}M}^{1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)}{Q_{\mathbf{x}M}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1}\right)}\end{aligned} \quad [115]$$

$$\Pi_{Th2}^{0}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)}=D_{\mathbf{y}}^{*0}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right) \quad [116]$$

$$\Pi_{Th2}^{1}\left(\mathbf{x}^{0},\mathbf{x}^{1},\mathbf{y}^{0},\mathbf{y}^{1}\right)=\frac{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{1},\mathbf{x}^{1}\right)}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)}=\frac{1}{D_{\mathbf{y}}^{*1}\left(\mathbf{y}^{0},\mathbf{x}^{0}\right)} \quad [117]$$

$$D_{\mathbf{y}}^{t}(\mathbf{y},\mathbf{x})=\sigma^{t}\left[\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}(\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x})^{-1}+\boldsymbol{\alpha}^{t\,\prime}\mathbf{y}\boldsymbol{\beta}^{t\,\prime}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{B}^{t}\mathbf{x}^{-1}\right]^{1/2},\ \mathbf{A}=\mathbf{A}',\ \mathbf{C}=\mathbf{C}' \quad [118]$$

$$\sigma^{t}\left[\mathbf{y}^{t\,\prime}\mathbf{A}\mathbf{y}^{t}\left(\mathbf{x}^{t\,\prime}\mathbf{C}\mathbf{x}^{t}\right)^{-1}\right]^{1/2}=1 \quad [119]$$

$$\mathbf{B}^0\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = \mathbf{0}'_M\,,\ \mathbf{y}^{0\,\prime}\mathbf{B}^0 = \mathbf{0}'_N\,,\ \boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{y}^1 = 0\,,$$

$$\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = 0\,,\ \boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{y}^1\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = 0 \text{ et } \mathbf{y}^{0\,\prime}\mathbf{B}^1\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = 0 \qquad [120]$$

$$\mathbf{B}^1\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = \mathbf{0}'_M\,,\ \mathbf{y}^{1\,\prime}\mathbf{B}^1 = \mathbf{0}'_N\,,\ \boldsymbol{\alpha}^{0\,\prime}\mathbf{y}^0 = 0\,,$$

$$\boldsymbol{\beta}^{0\,\prime}\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = 0\,,\ \boldsymbol{\alpha}^{1\,\prime}\mathbf{y}^0\boldsymbol{\beta}^{1\,\prime}\left(\mathbf{x}^0\right)^{-1} = 0 \text{ et } \mathbf{y}^{1\,\prime}\mathbf{B}^0\left(\mathbf{x}^1\right)^{-1} = 0 \qquad [121]$$

$$\Pi_F\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1,\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right) = \frac{Q_F^{\mathbf{y}}\left(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right)}{Q_F^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{w}^0,\mathbf{w}^1,\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\right)} = \Pi_{Th2}^0\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right) = \Pi_{Th2}^1\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^0,\mathbf{y}^1\right) \qquad [122]$$

$$P\dot{M}F = \dot{Q} - \sum_i \frac{P_i X_i}{PQ}\dot{X}_i = \dot{Q} - \sum_i s_i \dot{X}_i \qquad [123]$$

$$\Delta \ln MFP_t = \Delta \ln Q_t - \sum_i \bar{s}_{it}\Delta \ln X_{it}\text{, avec } \Delta x_t = x_t - x_{t-1} \text{ et } \bar{s}_{it} = \left(s_{it} + s_{i,t-1}\right)/2 \qquad [124]$$

$$\Delta \ln MFP_t = \ln\left(Q_t/Q_{t-1}\right) - \ln \prod_i \left[\left(X_{it}/X_{i,t-1}\right)^{\bar{s}_{it}}\right] \qquad [125]$$

$$z_t^C = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{it}q_{it} \qquad [126]$$

$$z_t^L = \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{i,t-1}q_{it} \qquad [127]$$

$$z_t^P = \mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{i,t+1}q_{it} \qquad [128]$$

$$LQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_{t-1}\cdot\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1}\cdot\mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_t^L}{z_{t-1}^C} \qquad [129]$$

$$LP_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t\cdot\mathbf{q}_{t-1}}{\mathbf{p}_{t-1}\cdot\mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_{t-1}^P}{z_{t-1}^C} \qquad [130]$$

$$PQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t\cdot\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t\cdot\mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^P} \qquad [131]$$

$$PP_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t\cdot\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1}\cdot\mathbf{q}_t} = \frac{z_t^C}{z_t^L} \qquad [132]$$

$$FQ_{t/t-1} = \sqrt{LQ_{t/t-1}PQ_{t/t-1}} \text{ et } FP_{t/t-1} = \sqrt{LP_{t/t-1}PP_{t/t-1}} \qquad [133]$$

$$LP_{t/t-1}PQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1}} = \frac{z_{t-1}^P}{z_{t-1}^C} \frac{z_t^C}{z_{t-1}^P} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \tag{134}$$

$$PP_{t/t-1}LQ_{t/t-1} = \frac{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1}} \frac{\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} = \frac{z_t^C}{z_t^L} \frac{z_t^L}{z_{t-1}^C} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \tag{135}$$

$$FP_{t/t-1}FQ_{t/t-1} = \sqrt{LP_{t/t-1}PP_{t/t-1}}\sqrt{LQ_{t/t-1}PQ_{t/t-1}} = \frac{z_t^C}{z_{t-1}^C} \tag{136}$$

$$z_t^C = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t = \sum_i p_{it} q_{it} = \sum_i \pi_{t/t-1}\, p_{i,t-1} q_{it} = \pi_{t/t-1}\, \mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t = \pi_{t/t-1}\, z_t^L \tag{137}$$

$$\frac{z_{t-1}^C z_t^C}{z_t^L} = \frac{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t-1} \sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i,t-1} q_{it}} = \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_t)}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} \tag{138}$$

$$\frac{z_{t-1}^C z_t^C}{z_t^L} = \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\pi_{t/t-1}\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t)}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} = \pi_{t/t-1} \frac{(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1})(\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t)}{\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_t} \tag{139}$$

$$\frac{z_{t-1}^C z_t^C}{z_t^L} = \pi_{t/t-1}\mathbf{p}_{t-1} \cdot \mathbf{q}_{t-1} = \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{q}_{t-1} = z_{t-1}^P \tag{140}$$

$$v_t^C = z_{Q,t}^C - z_{X,t}^C \tag{141}$$

$$LQ_{V,t/t-1} = \frac{z_{Q,t}^L - z_{X,t}^L}{z_{Q,t-1}^C - z_{X,t-1}^C} = \frac{z_{Q,t}^L - z_{X,t}^L}{v_{t-1}^C} = \frac{LQ_{Q,t/t-1} z_{Q,t-1}^C - LQ_{X,t/t-1} z_{X,t-1}^C}{v_{t-1}^C} \tag{142}$$

$$PQ_{V,t/t-1} = \frac{z_{Q,t}^C - z_{X,t}^C}{z_{Q,t-1}^P - z_{X,t-1}^P} = \frac{v_t^C}{z_{Q,t-1}^P - z_{X,t-1}^P} = \frac{v_t^C}{\dfrac{z_{Q,t}^C}{PQ_{Q,t/t-1}} - \dfrac{z_{X,t}^C}{PQ_{X,t/t-1}}} \tag{143}$$

$$FQ_{V,t/t-1} = \sqrt{LQ_{V,t/t-1}PQ_{V,t/t-1}} \tag{144}$$

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{\infty} d_{ia\tau} I_{ia,t-\tau} \tag{145}$$

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{\infty} (1-\delta_{ia})^{\tau} I_{ia,t-\tau} \tag{146}$$

$$K_{iat} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \left(1-\delta_{ia}\right)^{\tau} I_{ia,t-\tau} + \left(1-\delta_{ia}\right)^{t} K_{ia0} \qquad [147]$$

$$\ln Q_t = \beta_0 + \beta_K K_t + \left(1-\beta_K\right)\ln L_t + \varepsilon_t \qquad [148]$$

$$\ln Q_t = \beta_0 + \beta_K \left[\sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} + (1-\delta)^{t} K_0\right] + \left(1-\beta_K\right)\ln L_t + \varepsilon_t \qquad [149]$$

$$\ln Q_t - \ln L_t = \beta_0 + \beta_K \sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} + \beta_K (1-\delta)^{t} K_0 - \beta_K \ln L_t + \varepsilon_t \qquad [150]$$

$$\ln\left(\frac{Q_t}{L_t}\right) = \beta_0 + \beta_K \left[\sum_{\tau=1}^{t-1} (1-\delta)^{\tau} I_{t-\tau} - \ln L_t\right] + \gamma D_t + \varepsilon_t \qquad [151]$$

$$q_{iat} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(1-\delta_{ia}\right)^{\tau} \left[\prod_{s=1}^{\tau+1} \frac{1}{\left(1+r_{i,t+s}\right)}\right] c_{ia,t+\tau+1} \qquad [152]$$

$$q_{ia,t-1} = \frac{1}{1+r_{it}} c_{iat} + \left(\frac{1-\delta_{ia}}{1+r_{it}}\right) q_{iat} \qquad [153]$$

$$q_{iat} - q_{ia,t-1} = -\frac{1}{1+r_{it}} c_{iat} + \left(1 - \frac{1-\delta_{ia}}{1+r_{it}}\right) q_{iat} \qquad [154]$$

$$c_{iat} = r_{it} q_{ia,t-1} + \delta_{ia} q_{iat} - \left(q_{iat} - q_{ia,t-1}\right) \qquad [155]$$

$$\pi_{iat} = \frac{q_{iat} - q_{ia,t-1}}{q_{ia,t-1}} \qquad [156]$$

$$\left(1+\pi_{iat}\right) q_{ia,t-1} = q_{iat} \qquad [157]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right) - \pi_{iat}\right] \qquad [158]$$

$$\left(1-u_{it}\right) c_{iat} = q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right) - \pi_{iat}\right] \qquad [159]$$

$$c_{iat} = \frac{q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right) - \pi_{iat}\right]}{\left(1-u_{it}\right)} > q_{ia,t-1}\left[r_{it} + \delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right) - \pi_{iat}\right] \qquad [160]$$

$$q_{ia,t-1} - u_{it} z_{iat} q_{ia,t-1} - v_{iat} q_{ia,t-1} = \left(1 - u_{it} z_{iat} - v_{iat}\right) q_{ia,t-1} \qquad [161]$$

$$\left(1-u_{it}\right) c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(1 - u_{it} z_{iat} - v_{iat}\right)\left[r_{it} + \delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right) - \pi_{iat}\right] \qquad [162]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)\left[r_{it}+\delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right)-\pi_{iat}\right] \quad [163]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)\left[r_{it}+\delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right)-\pi_{iat}\right]+\phi_{iat}q_{ia,t-1} \quad [164]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left\{\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)\left[r_{it}+\delta_{ia}\left(1+\pi_{iat}\right)-\pi_{iat}\right]+\phi_{iat}\right\} \quad [165]$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left\{\left(\frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}\right)\left[r_{it}+\delta_{ia}\frac{q_{iat}}{q_{ia,t-1}}-\frac{q_{iat}-q_{ia,t-1}}{q_{ia,t-1}}\right]+\phi_{iat}\right\} \quad [166]$$

$$c_{iat} = T_{iat}\left[r_{it}q_{ia,t-1}+\delta_{ia}q_{iat}-\left(q_{iat}-q_{ia,t-1}\right)\right]+\phi_{iat}q_{ia,t-1} \quad [167]$$

$$T_{iat} = \frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}} \quad [168]$$

$$TEI_{iat} = T_{iat}-1 = \frac{1-u_{it}z_{iat}-v_{iat}}{1-u_{it}}-1 = \frac{u_{it}\left(1-z_{iat}\right)-v_{iat}}{1-u_{it}} \quad [169]$$

$$R_{it} = \sum_a c_{iat}K_{iat} \quad [170]$$

$$R_{it} = \sum_a c_{iat}K_{iat} = \sum_a \left\{T_{iat}\left[r_{it}q_{ia,t-1}+\delta_{ia}q_{iat}-\pi_{iat}q_{ia,t-1}\right]+\phi_{iat}q_{ia,t-1}\right\}K_{iat} \quad [171]$$

$$R_{it} = \sum_a T_{iat}r_{it}q_{ia,t-1}K_{iat}+\sum_a T_{iat}\delta_{ia}q_{iat}K_{iat}-\sum_a T_{iat}\pi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat}+\sum_a \phi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat} \quad [172]$$

$$\sum_a T_{iat}r_{it}q_{ia,t-1}K_{iat} = R_{it}-\sum_a T_{iat}\delta_{ia}q_{iat}K_{iat}+\sum_a T_{iat}\pi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat}-\sum_a \phi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat} \quad [173]$$

$$r_{it} = \frac{R_{it}-\sum_a T_{iat}\delta_{ia}q_{iat}K_{iat}+\sum_a T_{iat}\pi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat}-\sum_a \phi_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat}}{\sum_a T_{iat}q_{ia,t-1}K_{iat}} \quad [174]$$

$$r_{it} = \left(1+\rho_{it}\right)\left(1+i_t\right)-1 = \rho_{it}+i_t+\rho_{it}i_t \approx \rho_{it}+i_t \quad [175]$$

$$\pi^*_{iat} = \frac{1+\pi_{iat}}{1+i_t}-1 = \frac{\pi_{iat}-i_t}{1+i_t} \quad [176]$$

$$\pi_{iat} = \left(1+\pi^*_{iat}\right)\left(1+i_t\right)-1 = \pi^*_{iat}+i_t+\pi^*_{iat}i_t \approx \pi^*_{iat}+i_t \quad [177]$$

$$q_{iat} = \left(1+\pi_{iat}^{*}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} \approx \left(1+\pi_{iat}^{*}+i_t\right)q_{ia,t-1} \tag{178}$$

$$c_{iat} = \left(r_{it}+\delta_{ia}\right)q_{iat} - \left(1+r_{it}\right)\left(q_{iat}-q_{ia,t-1}\right) \tag{179}$$

$$c_{iat} = \left(1+r_{it}\right)q_{iat} - \left(1-\delta_{ia}\right)q_{iat} - \left(1+r_{it}\right)\left(q_{iat}-q_{ia,t-1}\right) \tag{180}$$

$$c_{iat} = \left(1+\rho_{it}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} - \left(1-\delta_{ia}\right)\left(1+\pi_{iat}^{*}\right)\left(1+i_t\right)q_{ia,t-1} \tag{181}$$

$$c_{iat} = \left(\rho_{it}+\delta_{ia}\right)q_{iat} \tag{182}$$

$$c_{iat} \approx \left(1+\rho_{it}+i_t\right)q_{ia,t-1} - \left(1-\delta_{ia}\right)\left(1+\pi_{iat}^{*}+i_t\right)q_{ia,t-1} \tag{183}$$

$$c_{iat} \approx \left(\rho_{it}-\pi_{iat}^{*}\right)q_{ia,t-1} + \delta_{ia}q_{iat} \tag{184}$$

$$c_{iat} = q_{ia,t-1}\left(r_{it}-\pi_{iat}\right) + \delta_{ia}q_{iat} \tag{185}$$

$$LQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ait}}{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ai,t-1}} = \frac{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ait}}{R_{i,t-1}} \tag{186}$$

$$PQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ait}K_{ait}}{\sum_a c_{ait}K_{ai,t-1}} = \frac{R_{it}}{\sum_a c_{ait}K_{ai,t-1}} \tag{187}$$

$$FQ_{it}^{K} = \sqrt{LQ_{it}^{K}PQ_{it}^{K}} \tag{188}$$

$$LP_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ait}K_{ai,t-1}}{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ai,t-1}} = \frac{\sum_a c_{ait}K_{ai,t-1}}{R_{i,t-1}} \tag{189}$$

$$PP_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ait}K_{ait}}{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ait}} = \frac{R_{it}}{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ait}} \tag{190}$$

$$FP_{it}^{K} = \sqrt{LP_{it}^{K}PP_{it}^{K}} \tag{191}$$

$$FP_{it}^{K}FQ_{it}^{K} = \frac{\sum_a c_{ait}K_{ait}}{\sum_a c_{ai,t-1}K_{ai,t-1}} \tag{192}$$

$$FP_{it}^{K} = \frac{1}{FQ_{it}^{K}} \frac{\sum_{a} c_{ait} K_{ait}}{\sum_{a} c_{ai,t-1} K_{ai,t-1}} \quad [193]$$

$$Q_L\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i s_i^{0,0} \frac{x_i^1}{x_i^0}, \text{ où } s_i^0 = \frac{p_i^0 x_i^0}{\sum_j p_j^0 x_j^0} \quad [194]$$

$$Q_P\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i s_i^{1,0} \frac{x_i^1}{x_i^0}, \text{ où } s_i^{1,0} = \frac{p_i^1 x_i^0}{\sum_j p_j^1 x_j^0} \quad [195]$$

$$\ln Q_T\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) = \sum_i \bar{s}_i \ln\left(\frac{x_i^1}{x_i^0}\right), \text{ où } \bar{s}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{p_i^0 x_i^0}{\sum_j p_j^0 x_j^0} + \frac{p_i^1 x_i^1}{\sum_j p_j^1 x_j^1}\right) = \frac{1}{2}\left(s_i^{0,0} + s_i^{1,1}\right) \quad [196]$$

$$D_t = \frac{T - t}{T - \beta t} \quad [197]$$

Des statistiques sur le Québec d'hier et d'aujourd'hui
pour le Québec de demain

Institut
de la statistique
Québec